Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 5

Abgabetermin: Mittwoch, 27.11.2019, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $t_0 \in \mathbb{N}$, $(X_t)_{t=t_0,t_0+1,\dots}$ ein positiver integrierbarer stochastischer Prozess adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq t_0}$ sowie $\mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t\geq t_0} \mathcal{F}_t\Big)$. Sei außerdem $a > -t_0$, sodass $\mathrm{E}\,[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = (1 + \frac{a}{t})X_t$ für alle t. Zeigen Sie:

a) $t^{-a}\mathbb{E}[X_t] \xrightarrow{t\to\infty} x \in (0,\infty)$.

b) $t^{-a}X_t$ konvergiert fast sicher gegen eine Zufallsvariable $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}_\infty)$.

c) Ist zusätzlich $q > 1$ und $\mathbb{E}[X_t^q] \leq ct^{qa}$ für ein $c < \infty$ und alle t, so gilt die Konvergenz aus b) auch in $\mathcal{L}^q$.

Hinweis: Aus der Stirling-Formel für die Gamma-Funktion folgt, dass es für jedes $a > -t_0$ ein $c_a \in (0,\infty)$ gibt, sodass $t^{-a}\prod_{k=t_0}^{t-1} \frac{k+a}{k} \xrightarrow{t\to\infty} c_a$. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Die Berechnung von c_a gibt allerdings 2 Bonuspunkte.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie den Prozess $\mathcal{D} = (D_n)_{n=n_0,n_0+1,\dots}$ für $n_0 \in \mathbb{N}$ mit Startwert $D_{n_0} = d \leq n_0$ und Werten in $\mathbb{N}$, der für ein festes $p \in (0,1)$ zu jedem Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{pD_n}{n}$ um 1 wächst und sonst konstant bleibt.

Zeigen Sie, dass $n^{-p}D_n$ fast sicher und in $\mathcal{L}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gegen eine Zufallsvariable D_∞ konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie die aufsteigenden k-ten Faktoriale der D_n,

$$D_n^{\uparrow k} := D_n(D_n + 1)\cdots(D_n + k - 1)$$

und verwenden Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Seien $Y_i,\ i = 1, 2, \dots$ unabhängig identisch verteilt mit $\mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ mit $X_n := 2^n \prod_{i=1}^n Y_i$ ein Martingal ist bzgl. einer geeigneten Filtration. Konvergiert dieses fast sicher bzw. in $\mathcal{L}^1$?

b) Sei $(Z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Zeigen Sie, dass die Folge in $\mathcal{L}^1$ konvergiert, aber nicht fast sicher.

Hinweis: Bei der Widerlegung der fast sicheren Konvergenz kann das Borel-Cantelli-Lemma hilfreich sein.

c) Gibt es ein Martingal $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$, das in $\mathcal{L}^1$, aber nicht fast sicher konvergiert?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sie nehmen mit einem Startkapital von 100 Euro an einem fairen Roulettespiel teil und setzen mit wechselndem Einsatz auf „schwarz“.

a) Zeigen Sie: Wenn Sie Ihre Strategie so wählen, dass Sie auf keinen Fall Schulden machen müssen, dann konvergiert Ihr Spielkapital X_n P-fast sicher gegen eine Zufallsvariable X_∞.

b) Geben Sie Beispiele für jeweils eine Strategie an (Schulden machen ist erlaubt), so dass Ihr Spielkapital P-fast sicher gegen eine konstante Zufallsvariable X_∞ konvergiert mit $X_\infty > X_0$ bzw. $X_\infty < X_0$.

c) Gilt für die Strategien in b) auch $E[X_n] \to X_\infty$ für $n \to \infty$?

d) Funktionieren Ihre Strategien in b) auch noch in einem echten Roulettespiel (d.h. mit $p = \frac{18}{37}$)?