Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse"

Blatt 4

Abgabetermin: Mittwoch, 20.11.2019, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Seien $S_0 := 0$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ sowie $a < 0 < b \in \mathbb{Z}$ und $T_{a,b} := \min\{n \geq 1 \mid S_n \in \{a, b\}\}$ der erste Zeitpunkt, an dem die Summenfolge entweder a oder b erreicht.

a) Zeigen Sie $\mathbb{E}[T_{a,b}] < \infty$. Insbesondere ist also $T_{a,b} < \infty$ fast sicher.

b) Folgern Sie aus a) $\mathbb{P}(S_{T_{a,b}} = a) = \frac{b}{b-a}$.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[T_{a,b}]$.

d) (Bonus) Berechnen Sie $\mathbb{E}[s^{T_{a,b}}]$ für $s \in [0, 1]$.

e) (Bonus) Berechnen Sie $\mathbf{V}[T_{a,b}]$.

Hinweis: Wenn Sie nur einzelne Teilaufgaben bearbeiten, dürfen Sie die benötigten Ergebnisse der vorhergehenden auch ohne Beweis verwenden. Außerdem sind

$$(S_n)_{n\geq 0}, \qquad (S_n^2 - n)_{n\geq 0}, \qquad (s^{S_n}\mathbb{E}[s^{X_1}]^n)_{n\geq 0}$$

Martingale.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei M ein Martingal in diskreter Zeit. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) M ist konstant,

b) M is previsibel,

c) $\langle M\rangle = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $I = \{0, 1, \dots\}$ und $M = (M_t)_{t\in I}$, $N = (N_t)_{t\in I}$ quadratisch integrierbare und an derselben Filtration adaptierte Martingale. Der fast sicher eindeutig bestimmte, prevesible Prozess $(\langle M, N\rangle_t)_{t\in I}$ für den $(M_tN_t - \langle M, N\rangle_t)_{t\in I}$ ein Martingal ist, heißt der Kovariationsprozess von M und N.

a) Bestimmen sie ähnlich wie in Proposition 15.12 eine explizite Formel für $\langle M, N\rangle_t$.

b) Sei $H = (H_t)_{t\in I}$ previsibel. Zeigen Sie:

$$\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien X_i unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ für $i = 1, 2, \dots$. Sei weiter $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$. Definiere die beiden Martingale $S = (S_t)_{t=1,2,\dots}$ und $T = (T_t)_{t=1,2,\dots}$ durch $S_t = \sum_{i=1}^t X_i$ und $T_t = \prod_{i=1}^t (1 + X_i)$. Bestimmen Sie $\langle S, T\rangle$.