Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, 13.11.2019, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sie T eine Stoppzeit bzgl. einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. Die *$\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_{T-}$ der Vergangenheit strikt vor T* ist definiert durch

$$\mathcal{F}_{T-} := \sigma\big(\{F \cap \{t < T\} \mid F \in \mathcal{F}_t,\, t \in I\} \cup \mathcal{F}_0\big).$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{F}_{T-} \subseteq \mathcal{F}_T$.

b) T ist $\mathcal{F}_{T-}$-messbar.

c) Sei S eine weitere Stoppzeit bzgl. $\mathbb{F}$ mit $S \le T$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{S-} \subseteq \mathcal{F}_{T-}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(B_t)_{t\ge 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Definiere einen neuen Prozess $\mathcal{X} = (X_t)_{0\le t\le 1}$ durch

$$X_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}.$$

Zeigen Sie

a) $X_t \xrightarrow{t\to 1}_p 0$. (Bonus für 2 Punkte: Zeigen Sie, dass dies sogar fast sicher gilt)

b) $(X_t)_{0\le t\le 1}$ ist eine Version des Prozesses von Aufgabe 2 auf Blatt 2.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie den zweiten Teil von Prop 15.6. Das heißt zeigen Sie für $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ wie in Prop 15.6, dass

$$\mathcal{Y}_\star \mathbf{Q} = \mathcal{X}_\star \mathbf{P}$$

gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(M_n)_{n=0,1,\dots}$ ein nicht-konstantes Martingal bezüglich seiner natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_n)$ und für $t \in \mathbb{R}^{\ge 0}$

$$X_t := M_{\lfloor t\rfloor} + (t - \lfloor t\rfloor)\big(M_{\lceil t\rceil} - M_{\lfloor t\rfloor}\big)$$

dessen lineare Interpolation.

a) Bestimmen Sie die natürliche Filtration von $(X_t)_{t\ge 0}$.

b) Ist die Filtration aus dem a)-Teil rechtsstetig?

c) Bildet (X_t) ein Martingal bezüglich dieser Filtration?