Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 06.11.2019, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Nennen Sie ein Beispiel für einen Prozess $\mathcal{X} = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit stetigen Pfaden und eine zufällige Zeit T, die bezüglich der natürlichen Filtration von $\mathcal{X}$ eine Options- aber keine Stoppzeit bildet.
Hinweis: $X_t = (t - S)^+$ für eine geeignete nicht-negative Zufallsvariable S.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung mit $B_0 = 0$. Zeigen Sie, dass $(B_t - tB_1)_{0\leq t\leq 1}$ ein Gauß'scher Prozess ist und berechnen Sie die Covarianz-Struktur.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein stetiger Gauß'scher Prozess $\mathcal{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ heißt *fraktionelle Brown'sche Bewegung* mit Hurst-Parameter $h \in (0,1)$, falls $\mathbb{E}[X_t] = 0, t \geq 0$ und er die Covarianz-Struktur $\mathbb{E}[X_t X_s] = \frac{1}{2}(t^{2h} + s^{2h} - |t-s|^{2h})$ besitzt. Zeigen Sie:

a) Für jedes $h \in (0,1)$ gibt es die fraktionelle Brown'sche Bewegung.

b) Eine fraktionelle Brown'sche Bewegung mit Hurst-Parameter $h = \frac{1}{2}$ ist eine Brow'sche Bewegung.

c) Eine fraktionelle Brown'sche Bewegung mit Hurst-Parameter h hat fast sicher Hölder-stetige Pfade zu jedem Parameter $\gamma < h$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachte folgende Eigenschaften eines stochastischen Prozesses $\mathcal{X} = (X_t)_{t\geq 0}$:

1: X_t ist exponentialverteilt mit $\mathbf{V}[X_t] > 0$ für $t > 0$.

2: Für $0 \leq t_0 < t_1 ... < t_n$ ist $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_{i=1,\dots,n}$ eine unabhängige Familie.

3: Für $0 \leq s < t$ ist $\mathbf{E}[X_t - X_s] = t - s$.

4: Für $0 \leq s < t$ ist $X_t - X_s \sim X_{t-s}$.

5: Es gibt eine Modifikation von $\mathcal{X}$ mit stetigen Pfaden.

6: Es gibt *keine* Modifikation von $\mathcal{X}$ mit stetigen Pfaden.

Beweisen Sie (durch Beispiel) oder widerlegen Sie: Es gibt einen stochastischen Prozess $\mathcal{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_0 = 0$ und den Eigenschaften

a) 1, 2, 4 b) 1, 2, 6 c) 1, 3, 5 d) 1, 3, 6