# Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

## Blatt 1

**Abgabetermin:** Mittwoch, 30.10.2019, bis 12.15 Uhr im Vorlesungsraum Albertstraße 23b
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Es sei $\mathcal{X}$ eine Brown'sche Bewegung und $T_1, T_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, exp(1)-verteilter Zufallsvariablen. Weiter sei $\mathcal{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch

$$Y_t = X_t + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t=T_k\}}.$$

Untersuchen Sie diese beiden Prozesse auf die drei Typen von Gleichheiten, die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben.

b) Nennen Sie zwei Prozesse, die Versionen voneinander sind, aber keine Modifikationen.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie die Existenz eines Grundraums $\Omega$ und von Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ für alle $i \in [0, 1]$ mit

1) $X_i \sim \mathcal{N}(i, 1)$ und
2) $(X_i)_{i\in[0,1]}$ ist stochastisch unabhängig.

b) Gibt es eine Modifikation von $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in[0,1]}$ mit stetigen Pfaden?

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ zwei unabhängige Poisson Prozesse zu den Parametern $\lambda > 0$ und $\mu > 0$. Zeigen Sie:

$(X_t + Y_t)_{t\geq 0}$ ist ein Poisson Prozess zum Parameter $\lambda + \mu$.

b) Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ zwei unabhängige Brown'sche Bewegungen. Zeigen Sie:

$\big((X_t + Y_t)/\sqrt{2}\big)_{t\geq 0}$ ist wieder eine Brown'sche Bewegung.

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Sei $X = (X_n)_{n\geq 1}$ ein auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierter, zeitdiskreter reellwertiger stochastische prozess und $\mathbb{F} = \sigma(X)$ die von $X$ erzeugte Filtrierung. Zeigen Sie: Ist der Prozess $(S_n)_{n\geq 1}$ mit $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$, so gilt $\mathbb{E}[X_iX_j] = 0$ für alle $i \neq j$.

b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierte, reellwertige, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. Ferner sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ und $Y_n := \big(\sum_{i=1}^n X_i\big)^2 - n\sigma^2$. Zeigen Sie, dass der Prozess $Y = (Y_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ ist.