Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1

Seien X, X_1, X_2, Y, Z reelwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes:

a) $\mathbb{E}[\alpha X_1 + \beta X_2 | Y] = \alpha \mathbb{E}[X_1|Y] + \beta \mathbb{E}[X_2|Y]$ $\mathbb{P}$-f.s.

b) $X_1 \leq X_2$ $\mathbb{P}$-f.s. $\Longrightarrow \mathbb{E}[X_1|Y] \leq \mathbb{E}[X_2|Y]$ $\mathbb{P}$-f.s.

c) X $\sigma(Z)$-messbar $\Longrightarrow \mathbb{E}[XY|Z] = X\mathbb{E}[Y|Z]$ $\mathbb{P}$-f.s.

d) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ $\mathbb{P}$-f.s., falls $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

e) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ $\mathbb{P}$-f.s., falls $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

a) Aus $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ folgt nicht, dass X, Y stochastisch unabhängig sind
Hinweis: Betrachten die hierzu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$ und $Y = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}$.

b) X, Y sind stochastisch unabhängig, falls für alle Borel-messbaren Funktionen g mit $\mathbb{E}[|g(X)|] < \infty$ gilt
$$\mathbb{E}[g(X)|Y] = \mathbb{E}[g(X)]$$

Aufgabe 3

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Poi(λ)-verteilter Zufallsvariablen und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Finden Sie eine monoton wachsende, reellwertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $(S_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. der Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ ist.