Irrfahrten

Eine *Irrfahrt* auf $\mathbb{Z}^d$ ist eine zeit-diskrete, zeitlich homogene, $\mathbb{Z}^d$-wertige Markov-Kette mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}^d}$, gegeben durch

$$p(i,j) = p_{j-i}$$

für einen Wahrscheinlichkeitsvektor $p = (p_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$. Die Irrfahrt heißt *einfach*, falls $p_i = 0$ für $|i| > 1$, d.h. in diesem Fall springt die Irrfahrt nur zu benachbarten Punkten. Weiter heißt die Irrfahrt *einfach symmetrisch*, falls $p_i = \frac{1}{2d}$ für $|i| = 1$ und $p_i = 0$ andernfalls.

Theorem 1. *Sei $X = (X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$. Dann gilt:*

1. *Für $d = 1$ und $d = 2$ ist die Irrfahrt null-rekurrent.*
2. *Für $d \geq 3$ ist die Irrfahrt transient.*

Remark 2. *Im Beweis werden wir die Stirling-Formel benutzen, an die wir kurz erinnern. Es gilt*

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Beweis. Aus Lemma 18.5 ist bekannt, dass eine Markov-Kette genau dann rekurrent ist, wenn für alle x gilt, dass $X_t = x$ fast sicher unendlich oft gilt, d.h. wenn

$$S_x := \sum_{t=0}^{\infty} 1_{X_t=x} = \infty.$$

Weiter ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathbb{E}[S_x] = \infty$, also wenn

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = x) = \infty.$$

Wir werden nun die linke Seite für $d = 1, 2, 3$ abschätzen.
1. Für $d = 1$ schreiben wir

$$\mathbb{P}_x(X_t = x) = \begin{cases} 0, & t \text{ ungerade,} \\ \binom{2s}{s}\frac{1}{2^{2s}}, & t = 2s \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, für ein $0 < C < 1$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = x) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2s}{s} \frac{1}{2^{2s}} \geq C \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi 2s}(2s/e)^{2s}}{2\pi s(s/e)^{2s}} \frac{1}{2^{2s}} = C \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi s}} = \infty.$$

Für $d = 2$ schreiben wir

$$\mathbb{P}_x(X_t = x) = \begin{cases} 0, & t \text{ ungerade,} \\ \sum_{k=0}^{s} \binom{2s}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2(s-k)}{s-k}\frac{1}{4^{2s}}, & t = 2s \text{ gerade.} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, für ein $0 < C < 1$

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{s} \binom{2s}{2k} \binom{2k}{k} \binom{2(s-k)}{s-k} \frac{1}{4^{2s}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2s}{s} \frac{1}{4^{2s}} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \binom{s}{s-k} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{2s}{s}^2 \frac{1}{4^{2s}} \geq C \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2\pi 2s (2s/e)^{4s}}{(2\pi s)^2 (s/e)^{4s}} \frac{1}{4^{2s}} = C \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\pi s} = \infty.\end{aligned}$$

Nach Theorem 18.11 ist nun X genau dann positiv rekurrent, wenn es eine invariante Verteilung gibt. Diese müsste aus Symmetriegründen jedoch translations-invariant sein. Da es jedoch auf $\mathbb{Z}^d$ keine translations-invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, muss X für $d = 1, 2$ null-rekurrent sein.

2. Es genügt, die Behauptung für $d = 3$ zu zeigen, da in höheren Dimensionen eine Rückkehr etwa zu $x = 0$ auch eine Rückkehr zu $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ bedeutet. Wir haben hier

$$\mathbb{P}_x(X_t = x) = \begin{cases} 0, & t \text{ ungerade}, \\ \sum_{i,j,k: i+j+k=s} \frac{(2s)!}{(2i)!(2j)!(2k)!} \binom{2i}{i} \binom{2j}{j} \binom{2k}{k} \frac{1}{6^{2s}}, & t = 2s \text{ gerade}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, für ein $C > 1$

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i,j} \frac{(2s)!}{i!^2 j!^2 (s-i-j)!^2} \frac{1}{6^{2s}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2s}} \binom{2s}{s} \sum_{i,j} \Big(\frac{s!}{i! j! (s-i-j)!} \frac{1}{3^s} \Big)^2 \\ &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2s}} \binom{2s}{s} \Big(\max_{i,j} \frac{s!}{i! j! (s-i-j)!} \frac{1}{3^s} \Big) \sum_{i,j} \frac{s!}{i! j! (s-i-j)!} \frac{1}{3^s} \\ &\leq C \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2s}} \frac{\sqrt{2\pi 2s} (2s/e)^{2s}}{\sqrt{2\pi s} (s/e)^s} \frac{1}{(2\pi s/3)^{3/2} (s)^s} \frac{1}{3^s} \\ &= C \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi 2s}}{\sqrt{2\pi s}} \frac{1}{(2\pi s/3)^{3/2}} = C \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{\frac{54}{(2\pi)^3}} \frac{1}{s^{3/2}} < \infty.\end{aligned}$$

$\square$