Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 5

Abgabetermin: Donnerstag, 09.01.2020, bis 14:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.19-2.21), UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathrm{Var}(X) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}X) = 1$, d.h. X ist mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant.

b) Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{E}|X|^3 < \infty$, die eine symmetrische Zähldichte besitzt, d.h. $p_X(-x) = p_X(x)$ für alle x. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Cov}(X, X^2) = 0.$$

Prüfen Sie X und X^2 auf Unabhängigkeit.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{X}$ die Menge aller diskreten Zufallsvariablen X mit endlicher Varianz. Zeigen Sie:

a) $X \sim Y \iff X - \mathbb{E}X = Y - \mathbb{E}Y$ mit Wahrscheinlichkeit 1 definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{X}$.

b) Sei $\mathcal{X}^{\sim}$ der Quotientenraum bezüglich obiger Äquivalenzrelation. Dann definiert

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{Cov}(X, Y)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{X}^{\sim}$.

c) Wie lässt sich $\mathrm{Cov}(X, Y)$ geometrisch deuten? Was sagt Ihnen der Satz des Pythagoras in diesem Zusammenhang?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig voneinander geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibe das Ergebnis des ersten Wurfes, Y das Ergebnis des zweiten. Bestimmen Sie für $Z = \max(X, Y)$ und $k \in \{1, 2, ..., 6\}$ den bedingten Erwartungswert von Z unter $Y = k$

$$\mathbb{E}(\max(X, Y) | Y = k).$$

b) Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien unabhängig und Poisson verteilt mit positiven Parametern λ_1 und λ_2. Berechnen Sie die bedingte Verteilung $\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte, diskrete Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ und sei N eine $\{1, 2, \ldots, n\}$-wertige Zufallsvariable, so, dass $X_1, \ldots, X_n, N$ gemeinsam unabhängig sind. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) = (\mathbb{E}N)(\mathbb{E}X_1).$$

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

Vor Ihnen steht ein Teller mit $n \geq 1$ gekochten Spaghetti. Sie verknoten nun immer zwei zufällig ausgewählte Spaghetti-Enden miteinander, bis alle Enden verknotet sind. Wie viele abgeschlossene Spaghetti-Ringe erhalten Sie im Mittel, d.h. was ist der Erwartungswert der Anzahl der Ringe aus einem oder mehreren zusammengeknoteten Spaghetti?

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten

und einen guten Start ins neue Jahr!