Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 4

Abgabetermin: Donnerstag, 12.12.2019, bis 14:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.19-2.21), UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei f eine stetige Funktion auf $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$. Sei für $n \geq 1$ das Polynom f_n durch

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq p\leq 1} |f(p) - f_n(p)| = 0$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie das ϵ-δ-Kriterium für stetige Funktionen mit $|\frac{k}{n} - p| < \delta$.
Für Terme mit $|\frac{k}{n} - p| \geq \delta$ kann die Tschebyschevsche Ungleichung helfen. (Warum?)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für unabhängige diskrete Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt:

a) Für beliebige Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$, sind die Zufallsvariablen $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig.

b) Für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind die Zufallvariablen $g(X_1, X_2), X_3, \ldots, X_n$ unabhängig.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir werfen n Mal unabhängig voneinander eine p-Münze, das heißt eine Münze, bei der mit Wahrscheinlichkeit p eine 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-p=q$ eine 0 fällt. Dies liefert uns ein Ergebnis $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Für einen solchen Vektor definieren wir die Anzahl der Runs $r(X)$ durch

$$r(X) := 1 + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \neq X_{i-1}\}},$$

das heißt es gilt zum Beispiel $r((0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1)) = 6$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $R = r(X)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien X und Y Zufallsgrößen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gelte

$$X(\omega_1) < X(\omega_2) \Rightarrow Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2).$$

Zeigen Sie, dass X und Y positiv korreliert sind, d.h. $\mathrm{Cov}(X,Y) \geq 0$.

Weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-stochastik-ws-2019-2020`