Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 3

Abgabetermin: Donnerstag, 28.11.2019, bis 14:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.19-2.21), UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sie haben drei faire 6-seitige Würfel W_1, W_2, W_3, deren Seiten unbeschriftet sind. Gibt es eine Möglichkeit die Würfel derart mit natürlichen Zahlen zu beschriften, dass für ihre jeweiligen Würfelergebnisse X_1, X_2, X_3 gilt

$$\mathrm{P}(X_1 > X_2) > 1/2, \qquad \mathrm{P}(X_2 > X_3) > 1/2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{P}(X_3 > X_1) > 1/2?$$

Liefern Sie ein Beispiel oder einen Gegenbeweis.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und X_1, X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen auf Ω. Zeigen Sie:

a) Sind die X_i Poisson-verteilt zu den Parametern $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, so ist deren Summe $Y = X_1 + X_2$ Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

b) Sind die X_i Poisson-verteilt zu den Parametern $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, so ist X_1 gegeben $X_1 + X_2 = l$ binomialverteilt zu den Parametern $n = l$ und $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, d.h.

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = l) = \binom{l}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{l-k}$$

für $k = 0, 1, ..., l$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer zum Parameter $p \in (0,1)$ geometrisch verteilten Zufallsvariablen X ($X \sim G(p)$).

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilten Zufallsvariablen X ($X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$).

c) Sie fahren täglich (d.h. an jedem Arbeitstag, sagen wir 250 mal im Jahr) mit dem Fahrrad zur Universität. Angenommen, die Wahrscheinlichkeit einer Panne am Tag n sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Prozent. Wie viele Pannen erwarten Sie in einem Jahr? Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie ein Jahr lang ohne Panne radfahren können? Wie wahrscheinlich ist es, am letzten Arbeitstag die zehnte Panne zu haben?

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein Bekannter bietet Ihnen folgendes Spiel an:
Sie setzen einen gewissen Betrag K€ ein und dürfen dafür eine faire Münze so lange werfen, bis zum ersten Mal „Kopf“ fällt. Geschieht dies beim n-ten Mal, so erhalten Sie 2^{n-1}€.

a) Was wäre ein fairer Spieleinsatz? (D.h. welchen Einsatz K müsste Ihr Bekannter von Ihnen verlangen, um „im Mittel“ nicht zu verlieren?)

b) Aufgrund der erstaunlichen Antwort aus a) wird das Spiel folgendermaßen abgewandelt:
Ihr Höchstgewinn wird auf 2^{20}€ $=$ 1048576€ begrenzt, was angesichts der finanziellen Möglichkeiten Ihres Bekannten gerade noch plausibel ist. Was ist unter diesen Voraussetzungen nun ein fairer Spieleinsatz?