Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 7

Abgabetermin: Donnerstag, 06.02.2020, bis 14:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.19-2.21), UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ für $i = 1, \ldots, n$ unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit $\mu_i, \sigma_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$.

a) Zeigen Sie, dass dann $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Verteilung von $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

c) Es sei nun $\mu_i = \mu$ und $\sigma_i^2 = \sigma^2$ für alle $1 \leq i \leq n$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_i - \bar{X}$ für ein beliebiges $i \in \{1, ..., n\}$.

Hinweis: Verwenden Sie für a) die Faltungsformel:
Seien X, Y unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungen $\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_Y$ und zugehörigen Dichten f_X, f_Y, dann ist auch die Verteilung $\mathbb{P}_{X+Y}$ ihrer Summe stetig und besitzt die Dichte

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) f_Y(x-y)\, dy.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Untersuchen Sie diese auf stochastische, fast sichere und $\mathcal{L}^p$-Konvergenz für alle $p \geq 1$.

Hinweis: Sie dürfen das 2. Lemma von Borel-Cantelli ohne Beweis verwenden:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Ereignissen aus $\mathcal{A}$. Gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, so folgt $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Es seien X, Y, X_n $(n \in \mathbb{N})$ reellwertige Zufallsvariablen und $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ sowie $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ gilt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Es seien X, X_n $(n \in \mathbb{N})$ reellwertige Zufallsvariablen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Wenn $X_n \xrightarrow{f.s.} X$, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$.

b) Wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, dann gilt $X_n \xrightarrow{f.s.} X$.

(bitte wenden)

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Nennen Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Aussagen:

a) Aus der stochastischen Konvergenz folgt nicht die fast sichere Konvergenz.

b) Aus der fast sicheren Konvergenz folgt nicht die $\mathcal{L}^1$-Konvergenz.