Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 1

Abgabetermin: Donnerstag, 31.10.2019, bis 14:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.19-2.21), UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.7:
Sei Ω eine Menge, I eine beliebige Indexmenge und sei $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$ für alle $i \in I$. Dann gilt

a)
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

b)
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie (v), (vi) und (viii) von Lemma 1.8:
Sei Ω abzählbar und $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein diskretes Maß. Dann gelten folgende Aussagen

a) Stetigkeit von unten: Ist $A_i, i \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$ (d.h. $A_1 \subset A_2 \subset \dots$), so folgt
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

b) Stetigkeit von oben: Ist $A_i, i \in \mathbb{N}$ eine absteigende Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$ (d.h. $A_1 \supset A_2 \supset \dots$) und gilt $\mu(A_1) < \infty$, so folgt
$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

c) Sub-Sigma-Additivität: Für Ereignisse $A_i \in \mathcal{P}(\Omega), i \in \mathbb{N}$ gilt
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie die sogenannte Siebformel:
Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A_i \in \mathcal{P}(\Omega), i \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein fairer 6-seitiger Würfel wird n-mal geworfen, $n \geq 1$.

a) Geben Sie den Grundraum Ω und die Verteilung $\mathbb{P}$ auf Ω an.

b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω dar:
A : Die Augenzahl beim ersten Wurf ist gerade.
B : Die Augenzahlen aller Würfe sind ungerade.
C : Die Summe aller Augenzahlen ist ungerade.
D : Beim ersten und beim n-ten Wurf beträgt die Augenzahl 1 .

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die in b) angegebenen Ereignisse.

Aufgabe 5 (1+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Zähldichten normiert sind (d.h. $\sum_{k\in T} f(k) = 1$)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.
Sei $f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ und $T = \{0, \ldots, n\}$.

b) Seien $N, K, n \in \mathbb{N}$ mit $K \leq N$ und $n \leq N$.
Sei $f(k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ und $T = \{\max\{0, n-(N-K)\}, \ldots, \min\{n, K\}\}$.

Hinweis: Für b) sind Polynome der Form $(x + 1)^{a+b}$ hilfreich, die binomische Formel sowie Koeffizientenvergleich.