Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

Blatt 9

Abgabetermin: Dienstag, 07.01.2020, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf (a, b) zweimal differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex auf (a, b) ist, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $E, F \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(E, F)$. Es gelte

(1) Für alle $x \in E$ ist $f'(x)$ invertierbar,

(2) f ist umkehrbar und f^{-1} ist stetig.

Zeigen Sie, dass f dann ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $E, F \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(E, F)$ so, dass $f'(x)$ für alle $x \in E$ invertierbar ist. Zeigen Sie:

(a) $f(E)$ ist offen.

(b) Ist f zusätzlich injektiv, so ist f ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus von E auf $f(E)$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 2 und erinnern Sie sich an den Satz über die lokale Umkehrbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen aus der Analysis II.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Es sei

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} \times (0, 2\pi) & \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\} \\ (r, \phi) & \mapsto (r\cos(\phi), r\sin(\phi)). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es sich hierbei um einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus handelt.

(b) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $K_I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \in I\}$ eine Kugelschale, sowie $g \in \mathcal{C}(K_I, \mathbb{R})$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{K_I} g(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_I \int_0^{2\pi} g(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) r d\phi dr.$$

(c) Nutzen Sie die Kugelkoordinaten um für das Gauß'sche Integral zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$