Übungen zur Vorlesung
"Analysis III"

Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 16.12.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien λ, μ und ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

(a) Wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A) < \epsilon$ und $\nu(A^c) < \epsilon$, dann ist $\mu \perp \nu$.

(b) Sind $\lambda \ll \mu$ und $\mu \perp \nu$, dann auch $\lambda \perp \nu$.

(c) Wenn $\mu \ll \nu$ und $\mu \perp \nu$, muss schon $\mu \equiv 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass zwei σ-endliche Maße μ, ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ genau dann übereinstimmen, wenn für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit kompaktem Träger gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\nu.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, das folgenden Resultat zu zeigen: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar genau dann, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Lebesgue-Nullmenge ist.

(a) Es sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen mit $Z_n \subset Z_{n+1}$ für alle n und der g der punktweise Grenzwert der f approximierenden unteren Treppenfunktionen auf $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sowie h der punktweise Grenzwert der f approximierenden oberen Treppenfunktionen. Folgern Sie die Hinrichtung, indem Sie das Lebesgue-Maß von

$$E := \{x \in [a, b] \mid g(x) \neq h(x)\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$$

bestimmen und zeigen, dass f stetig auf $[a, b] \setminus E$ ist.

(b) Für die Rückrichtung sei E die Nullmenge der Unstetigkeitsstellen, $\epsilon > 0$ und $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Begründen Sie, dass Sie E durch offene Intervalle I_n überdecken können mit $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\epsilon}{4M}$, sowie $[a, b] \setminus E$ durch offene Intervalle $J(x)$, sodass $|f(z) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ für $y, z \in J(x) \cap [a, b]$. Wählen Sie eine endliche Teilüberdeckung und basteln sie aus den Endpunkten der in ihr enthaltenen Intervalle eine Partition von $[a, b]$. Folgern Sie mit dieser die Riemann-Integrierbarkeit von f.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie den Raum

$$\left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist (uneigentlich) Riemann-integrierbar mit } \int_0^1 |f(x)|dx < \infty \right\}$$

modulo der Äquivalenzrelation $f \sim g :\Leftrightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = 0$ mit der Norm

$$||f|| := \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Ziel ist es zu zeigen, dass dieser Raum nicht vollständig bezüglich dieser Norm ist. Sei dazu $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$ und

$$F_n := \bigcup_{k=1}^{n} \left(q_k - \frac{1}{2^{k+2}}, q_k + \frac{1}{2^{k+2}} \right) \cap [0,1], \quad F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Weiter seien

$$f_n(x) := \mathbb{1}_{F_n}(x) \quad \text{und} \quad f(x) := \mathbb{1}_F(x).$$

(a) Nehmen Sie an, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen eine Riemann-integrierbare Funktion g. Zeigen Sie, dass dann $g = f$ bis auf eine Lebesgue-Nullmenge gelten muss.

(b) Zeigen sie, dass f nicht Riemann-integrierbar ist.

(c) Führen Sie die Annahme, dass g Riemann-integrierbar ist, sofern $f = g$ fast überall, zu einem Widerspruch.
HINWEIS: Zeigen Sie für $F' := [0,1] \setminus F$ und $G := \{x \in [0,1] \mid f(x) \neq g(x)\}$, dass f auf $F' \setminus G$ unstetig ist.