# Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

## Blatt 7

**Abgabetermin:** Montag, 09.12.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$||f||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf_{N\in\mathcal{A}:\mu(N)=0} \sup_{x\in\Omega\setminus N} |f(x)|.$$

(a) Zeigen Sie, dass analog zur Hölder'schen Ungleichung (Blatt 6, Aufgabe 1) für Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_\Omega |fg|\ d\mu \leq ||f||_\infty \cdot \int_\Omega |g|\ d\mu.$$

(b) Es existiere ein $q \in \mathbb{N}$, sodass $\left(\int_\Omega |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_\Omega |f|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = ||f||_\infty.$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ für $i = 1,2$ und $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der Produktraum.

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \subset \Omega$, für die für alle $\omega_1 \in [0,1]$ der $\omega_1$-Schnitt $A_{\omega_1} := \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\} \in \mathcal{A}_2$ ist und ebenso $A_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$, aber $A \notin \mathcal{A}$ gilt.

(b) Sei $D = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$ die Diagonale in $\Omega$, $\lambda$ das Lebesguemaß auf $\Omega_1$ und $\mu$ das Zählmaß auf $\Omega_2$, d.h.

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $D \in \mathcal{A}$, und berechnen Sie

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x,y) d\lambda(x) d\mu(y) \qquad \text{und} \qquad \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x,y) d\mu(y) d\lambda(x).$$

(c) Ist das Ergebnis in Teil (b) ein Widerspruch zum Satz von Fubini?

(bitte wenden)

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

(a) Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann Riemann- und Lebesgue-Integral

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_{[a,b]} f(x)d\lambda(x)$$

existieren und übereinstimmen.

(b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

existiert, jedoch nicht das Lebesgue-Integral

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin(x)}{x} d\lambda(x).$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

(a) Es sei

$$B_r(0) := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

der Kreis mit Radius $r$. Bestimmen Sie sein $\lambda^2$-Volumen

$$\lambda^2(B_r(0)) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{B_r(0)}(x, y)d\lambda^2(x, y).$$

Hinweis: Überprüfen Sie, dass $x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x)$ eine Stammfunktion von $2\sqrt{1 - x^2}$ ist.

(b) Bestimmen Sie das $\lambda^3$-Volumen der Kugel

$$K_r := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}.$$