Übungen zur Vorlesung
"Analysis III"

Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 02.12.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Es seien weiter $1 \leq p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Ungleichung $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ für $x, y \geq 0$ und p, q wie oben.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die Menge der offenen Mengen in X, welche von d induziert werden. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt Basis der Topologie, falls

$$\forall A \in \mathcal{O} \ \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B} \ \text{ sodass } \ x \in B \subset A.$$

Zeigen Sie, dass es genau dann eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{O}$ gibt, wenn eine abzählbare dichte Teilmenge von X existiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen des Raumes der reellen Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ sind messbar bezüglich $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

(a) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 3\}$

(b) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^n x_k = 0 \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 3\}$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $f \in C([a, b])$ eine stetige reellwertige Funktion und $\epsilon > 0$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass ein Polynom p existiert mit

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Dazu definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ das Bernsteinpolynom

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

(bitte wenden)

Zeigen Sie nun:

(a) Es gilt

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| g_{n,k}(x)$$

für

$$g_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $x \in [a,b]$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 g_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Folgern Sie nun die Behauptung, indem Sie für $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wählen, sodass für $|x-y| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ und dann per Fallunterscheidung $|\frac{k}{n} - x| < \delta$ und $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$ mithilfe von (a)

$$|B_n f(x) - f(x)| < \epsilon$$

gleichmäßig für $x \in [a,b]$ erhalten.