Übungen zur Vorlesung
"Analysis III"

Blatt 12

Abgabetermin: Montag, 27.01.2020, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $n \geq 1$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix mit reellwertigen Einträgen. Wir definieren die *Quadrik*

$$Q_A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top A x = 1\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Q_A eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.
HINWEIS: Betrachten Sie die Funktion $f(x) := x^\top Ax$ und nutzen Sie den Satz vom regulären Wert.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $\mathbb{S}^{n-1}$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei

$$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top A = E_n\}$$

die orthogonale Gruppe, wobei E_n die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichne. Ferner sei $M_s(n \times n; \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der Vektorraum der symmetrischen Matrizen.

a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(M_s(n \times n; \mathbb{R}))$.

b) Wir definieren die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow M_s(n \times n; \mathbb{R})$ durch $f(A) = A^\top A$. Zeigen Sie, dass

$$f'(A)B = A^\top B + B^\top A$$

für jedes $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.
HINWEIS: Rufen Sie sich einen Zusammenhang zwischen Jacobi-Matrix und Richtungsableitungen in Erinnerung, so können Sie vermeiden, erstere überhaupt aufstellen zu müssen.

c) Folgern Sie, dass $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist und bestimmen Sie deren Dimension.
HINWEIS: Nutzen Sie den Satz vom regulären Wert.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $I : [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann nennen wir eine Abbildung $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine $\mathcal{C}^1$-*Kurve*. Ihr *Länge* $L(\gamma)$ definieren wir durch

$$L(\gamma) := \sup_{\substack{a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le b, \\ n \in \mathbb{N}}} \sum_{i=1}^{n} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_2 \, dt.$$

Sei nun $\beta \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ eine weitere $\mathcal{C}^1$-Kurve und $\phi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ eine Bijektion mit $\phi' > 0$ oder $\phi' < 0$, sodass $\gamma = \beta \circ \phi$, dann heißt γ eine *Umparametrisierung* von β. Diese heißt *orientierungserhaltend*, falls $\phi' > 0$ gilt, und *orientierungsumkehrend*, falls $\phi' < 0$ gilt.

(b) Es sei γ eine Umparametrisierung von β. Zeigen Sie, dass dann $L(\gamma) = L(\beta)$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion, sowie $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, E)$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Wir definieren das *Kurvenintegral*

$$\int_\gamma f(x)dx := \int_I \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

(a) Zeigen Sie für $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R}^n)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, dass
$$\int_\gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)dx = \lambda_1 \int_\gamma f_1(x)dx + \lambda_2 \int_\gamma f_2(x)dx.$$

(b) Es sei $\beta = \gamma \circ \phi$ eine Umparametrisierung. Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} \int_\beta f(x)dx &= \int_\gamma f(x)dx \qquad \text{falls } \phi \text{ orientierungserhaltend,} \\ \int_\beta f(x)dx &= -\int_\gamma f(x)dx \qquad \text{falls } \phi \text{ orientierungsumkehrend ist.} \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass
$$\left| \int_\gamma f(x)dx \right| \le ||f \circ \gamma||_I \cdot L(\gamma),$$
mit $|| \cdot ||_I$ der Supremumsnorm auf I.