Übungen zur Vorlesung
"Analysis III"

Blatt 11

Abgabetermin: Montag, 20.01.2020, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es bezeichne $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die *Einheitssphäre* im $\mathbb{R}^n$, welche gegeben ist durch

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass falls ein Atlas von $\mathbb{S}^{n-1}$ existiert, dieser aus mindestens zwei Karten bestehen muss.

(b) Konstruieren Sie einen Atlas von $\mathbb{S}^{n-1}$ und zeigen Sie damit insbesondere, dass $\mathbb{S}^{n-1}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.
HINWEIS: Betrachten Sie die für $N = e_n \in \mathbb{R}^n$ die *stereographische Projektion*

$$P_N(x) := \left(\frac{x_1}{1-x_n}, \frac{x_2}{1-x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n}, 0 \right)$$

und die analog definierte Projektion P_S mit $S = -e_n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $E_1 \subset \mathbb{R}^d$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $E_2 \subset \mathbb{R}^d$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit ist und bestimmen Sie ihre Dimension.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $E \subset \mathbb{R}^d$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass dann auch $f(E) \subset \mathbb{R}^d$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $m, l \geq 1$ und $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, sowie $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^l$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie, dass der Graph

$$\operatorname{graph}(f) := \{z \in \mathbb{R}^{m+l} \mid z = (x, f(x)) \text{ für } x \in U\}$$

eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+l}$ ist.