Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 13.01.2020, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $1 \leq q < p \leq \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass für $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \cap L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $q \leq r \leq p$ auch $f \in L^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für $f \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ auch $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $f, f_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Wir sagen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach* gegen f konvergiert, falls

$$\int_\Omega f_n g d\mu \longrightarrow \int_\Omega f g d\mu \quad \text{für alle } g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Normkonvergenz $||f_n - f||_2 \to 0$ die schwache Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f impliziert.

(b) Es konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen f und es gelte $||f_n||_2 \to ||f||_2$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann schon $||f_n - f||_2 \to 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Es sei $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Betrachten Sie die Abbildung $F : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ welche durch

$$g \mapsto \int_\Omega f g d\mu$$

gegeben ist und fassen Sie den Bildbereich als normierten Raum mit der Norm $|| \cdot ||_2$ auf. Zeigen Sie, dass F stetig ist.

(b) Betrachten Sie den Maßraum $([0, 2\pi], \mathcal{B}([0, 2\pi]), \lambda)$ mit dem ein-dimensionalen Lebesgue-Maß λ. Zeigen Sie, dass die Folge $f_n(x) := \sin(nx)$ schwach gegen $f(x) = 0$ konvergiert, jedoch nicht in der L^2-Norm.
Hinweis: Um schwache Konvergenz zu zeigen, d.h. das Integral $\int f_n g d\lambda$ zu berechnen kann es hilfreich sein, g durch Treppenfunktionen zu approximieren.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, M ein abgeschlossener linearer Unterraum und

$$M^{\perp} := \{h \in H \mid h \perp m \text{ für alle } m \in M\}.$$

Im Beweis des Projektionssatzes hatten wir gesehen, dass sich jedes $h \in H$ schreiben lässt als $h = f + f'$, wobei $f \in M$ und $f' \in M^{\perp}$. Es bezeichne P die orthogonale Projektion von H auf M, d.h. es gilt $P(h) = f$, und analog Q die orthogonale Projektion auf $M^{\perp}$, d.h. $Q(h) = f'$.

(a) Zeigen Sie, dass P linear ist und $P^2 := P \circ P = P$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $g, h \in H$ gilt $\langle P(g), h \rangle = \langle P(g), P(h) \rangle = \langle g, P(h) \rangle$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $h \in H$ gilt $||h||^2 = ||P(h)||^2 + ||Q(h)||^2$.