Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

Wintersemester 2018/19, Blatt 3

Abgabetermin: 8.11.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Es seien X_n und X reellwertige Zufallsvariablen für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Wenn $X_n \to_{fs} X$, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$.

b) Wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, dann gilt $X_n \to_{fs} X$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:

a) $X_n \to_{fs} X \Leftrightarrow \sup_{m \geq n} |X_m - X| \to_p 0$.

b) $X_n \to_p X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \geq n_\varepsilon : \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \varepsilon$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Seien $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n \sim Y_n$ für alle n. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $X_n \to_p 0 \Leftrightarrow Y_n \to_p 0$.

b) $X_n \to_{fs} 0 \Leftrightarrow Y_n \to_{fs} 0$.

c) $X_n \to_{\mathcal{L}^1} 0 \Leftrightarrow Y_n \to_{\mathcal{L}^1} 0$.

Hinweis: $X \sim Y$ bedeutet, dass $X_*\mathbb{P} = Y_*\mathbb{P}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für eine gleichgradig integrierbare Familie von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die keine integrierbare Majorante besitzt, d.h. $\mathbb{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|] = \infty$.

Bonusaufgabe (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass für jede Zufallsvariable X gilt, dass

$$\lim_{p\to\infty} \|X\|_{\mathcal{L}^p} = \operatorname{ess\,sup} |X|.$$

Hinweis: Das *essentielle Supremum* einer reellwertigen Zufallsvariablen Y ist ihre kleinste fast sichere obere Schranke, $\operatorname{ess\,sup} Y := \inf_{y\in\mathbb{R}}\{\mathbb{P}(Y \leq y) = 1\} \in (-\infty, \infty]$.