Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 2

Abgabetermin: 2.11.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Für $n \geq 1$, $p, \alpha \in (0,1)$ und $\mu \in \mathbb{R}$ seien $\nu_1 := \mathcal{B}(n,p)$, $\nu_2 := \mathcal{N}(\mu,1)$ und $\mathbb{P} := \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[X^2]$ für $X \sim \mathbb{P}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer, reellwertiger Zufallsvariablen, die punktweise gegen eine Zufallsvariable $X : \Omega \to [0, \infty]$ konvergiert. Zeigen Sie, dass im Falle $\lim_{n\to\infty} \int X_n \, d\mathbb{P} = 42$ auch X $\mathbb{P}$-integrierbar ist mit $\int X \, d\mathbb{P} \leq 42$. Zeigen Sie ferner anhand eines Beispiels, dass $\int X \, d\mathbb{P}$ jeden Wert in $[0, 42]$ annehmen kann.

Hinweis: Wählen Sie z.B. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{1}_{[0,1]} \cdot \lambda)$ und $f := c \cdot \mathbb{1}_{(0,1]}$ für vorgegebenes $c \in [0, 42]$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei $X \sim \mathrm{Poi}(\gamma)$ und $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Zeigen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\psi_{\frac{X-\gamma}{\sqrt{\gamma}}}(t) \xrightarrow{\gamma\to\infty} \psi_Z(t).$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass zwei Maße μ, ν auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, die σ-endlich auf dem System der offenen Mengen sind, genau dann übereinstimmen, wenn für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit kompaktem Träger $\mu[f] = \nu[f]$ gilt.

(bitte wenden)

Bonusaufgabe (6 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{N}_\mu := \{A \subset \Omega | \exists N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0, A \subset N\}$ das System aller Teilmengen von μ-Nullmengen und

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Zeigen Sie

a) $\tilde{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra,

b) $\tilde{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu)$.

Sei nun $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to \bar{\mathbb{R}}_+, \tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu$ mit $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{N}_\mu$ wie in Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}})$ ist.