Übungen zur Vorlesung “Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 13

Abgabetermin: 31.1.2019, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Berechnen Sie nach wie vielen Würfen man bei einer Folge unabhängiger Münzwürfe das Vorkommen der Folge (Zahl, Zahl, Kopf, Kopf) erwarten kann.

Hinweis: Orientieren Sie sich dabei an Beispiel 13.25.3. Untersuchen Sie vor allem, ob es sich bei (X_t) tatsächlich um ein Martingal handelt, und geben Sie die Majorante für (X_t^T) an.

Aufgabe 50 (4 Punkte)

Seien $p, X_0 \in (0,1)$ und $\mathcal{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $[0,1]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: Gegeben $X_0, \dots X_n$ ist

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1-p+pX_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } X_n \\ pX_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-X_n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}$ ein Martingal ist und fast sicher und in $\mathcal{L}^1$ konvergiert. Bestimmen Sie außerdem die Verteilung des Grenzwertes $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$.

Hinweis: Betrachten Sie für den letzten Teil den Prozess $\big(X_n(1-X_n)\big)_n$.

(bitte wenden)

Bonusaufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(M_t)_{t\in I}$ mit $I = -\mathbb{N}_0 = \{\dots,-2,-1,0\}$ ein quadratisch integrierbares Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{t\in I}$. Bestimmen Sie den quadratischen Variationsprozess $\langle M\rangle_t$.

HINWEIS: Ein solches Martingal auf einer nach unten unbeschränkten Indexmenge wird auch als *Rückwärtsmartingal* bezeichnet. Betrachten Sie für festes $T < 0$ das Martingal $M^T := (M_t)_{T\le t\le 0}$ und den Prozess $(Q_T^t)_{-\infty<T\le t}$ gegeben durch $Q_T^t := M_T^2 + \langle M^T\rangle_t$.

Bonusaufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B}\subset\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra und $B\in\mathcal{B}$ mit $\mathbb{P}(B)>0$. Zeigen Sie, dass für alle $A\in\mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A\mid\mathcal{B})>\varepsilon$ gilt

$$\mathbb{P}(A\mid B)>\varepsilon,$$

wobei $\mathbb{P}(A\mid B)$ die elementare bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichne.

b) Sei τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Es gebe $N\in\mathbb{N}$ und $\varepsilon\in(0,1)$, sodass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbb{P}(\tau<n+N\mid\mathcal{F}_n)>\varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass τ fast sicher endlich ist.

HINWEIS: Zeigen Sie bei b) zunächst, dass für alle $k\in\mathbb{N}_0$ gilt, dass $\mathbb{P}(\tau\ge kN)\le(1-\varepsilon)^k$. Verwenden Sie das Ergebnis aus a).