

Übungen zur Vorlesung “Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 10

Abgabetermin: 10.1.2019, bis 12:00 Uhr

(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 37

(4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass für unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform-verteilte Zufallsvariablen $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ gilt, dass

$$\mathbb{E}[\mathbb{X}_1 \mid \max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)] = \frac{3}{4} \max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2).$$

- b) Verallgemeinern Sie die Aussage, indem Sie $\mathbb{E}[\mathbb{X}_1 \mid \max(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)]$ für unabhängige $U([0, 1])$ -verteilte Zufallsvariablen $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ berechnen.

Aufgabe 38

(4 Punkte)

Es sei \mathbb{X} eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathbb{A} \subset \mathcal{A}$ eine Sub- σ -Algebra und

$$\mathbb{V}[\mathbb{X} \mid \mathbb{A}] := \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{X} - \mathbb{E}[\mathbb{X} \mid \mathbb{A}] \right)^2 \mid \mathbb{A} \right]$$

die bedingte Varianz von \mathbb{X} gegeben \mathbb{A} . Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}[\mathbb{X}] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[\mathbb{X} \mid \mathbb{A}]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[\mathbb{X} \mid \mathbb{A}]]$.

Aufgabe 39

(4 Punkte)

- a) Gegeben eine Zufallsvariable \mathbb{X} sei $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[\mathbb{X}], \sigma^2)$ für $\sigma^2 > 0$. Zeigen Sie im Fall $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$, dass \mathbb{X} normalverteilt ist, und bestimmen Sie die Parameter.
- b) Gegeben \mathbb{A} sei $\mathbb{X} \sim \text{Poi}(\mathbb{A})$. Bestimmen Sie die Verteilung von \mathbb{X} im im Fall $\mathbb{A} \sim \text{Exp}(1)$.

Aufgabe 40

(4 Punkte)

Vor Ihnen steht ein Teller mit $n \geq 1$ gekochten Spaghetti. Verknoten Sie nun immer zwei zufällig ausgewählte Spaghetti-Enden miteinander, bis alle Enden verknotet sind. Wie viele abgeschlossene Ringe bilden die Spaghetti im Erwartungswert?

*Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!*

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:

<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2018-2019/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2018-2019>