Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 9

Abgabetermin: 20.12.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Zentraler Grenzwertsatz.

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Es sei $S_n \sim \mathrm{Poi}(n)$ für $n \geq 1$. Berechnen Sie für $n \to \infty$ den Grenzwert von

$$q_n := \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\Big)^+\Big].$$

Hinweis: Beachten Sie, dass die Abbildung auf den Positivteil $x \mapsto x^+$ zwar stetig ist, aber nicht beschränkt. Betrachten Sie daher zunächst *Trunkierungen* dieser Abbildung, d.h. Abbildungen der Form $x \mapsto \min\{x^+, a\}$ für festes $a > 0$, und schätzen Sie geschickt ab.

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, die dem zentralen Grenzwertsatz genügt, auch das schwache Gesetz großer Zahlen gilt.

Hinweis: Gemeint ist hier, dass die Folge dem zentralen Grenzwertsatz genügt, falls für die Summe $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ gilt, dass $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{V}[S_n] < \infty$, und die standardisierte Summe

$$S_n^* := \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}} \xrightarrow{n\to\infty} N$$

für $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ erfüllt.

(bitte wenden)

Aufgabe 36 (4+2 Punkte)

a) Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Für $t > 0$ sei $Y_t := \min\{X, t\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X|Y_t] = X\mathbb{1}_{\{X<t\}} + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{1}_{\{X\geq t\}}.$$

b) Bestimmen Sie für $Z_t := \max\{X, t\}$ auch $\mathbb{E}[X|Z_t]$.

Hinweis: Betrachten Sie in a) ein schnittstabiles Erzeugendensystem von $\sigma(Y_t)$. Teil b) ist Bonus.