Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 8

Abgabetermin: 13.12.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Beweisen Sie Beispiel 11.1 mit Hilfe von Theorem 11.5.

Hinweis: Konstruieren Sie hierzu eine triagonale Familie von Zufallsvariablen $(X_{nj})_{n=1,2,\dots,j=1,\dots,m_n}$, die den nötigen Voraussetzungen genügt und $\sum_{j=1}^{m_n} X_{nj} \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ erfüllt.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Konstruieren Sie ein Beispiel dafür, dass die stochastische Unabhängigkeit in Theorem 11.5 benötigt wird. Geben Sie dazu eine triagonale Familie von Zufallsvariablen $(X_{nj})_{n=1,2,\dots,j=1,\dots,m_n}$ an, sodass zwar für alle $\varepsilon > 0$

$$\sup_{1\le j\le m_n} \mathbb{P}(|X_{nj}| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{P}(X_{nj} > 1) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{m_n} \mathbb{P}(X_{nj} = 1) \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

aber $\sum_{j=1}^{m_n} X_{nj}$ nicht gegen eine Poi(1)-verteilte Zufallsvariable konvergiert.

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Sei $(p_{nj})_{n=1,2,\dots,j=1,\dots,m_n}$ eine asymptotisch vernachlässigbare triagonale Familie von Zahlen in $[0,1]$ mit $\sum_{j=1}^{m_n} p_{nj} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in (0,\infty)$, sowie $X_{nj} \sim \text{geo}(p_{nj})$, $n = 1,2,\dots, j = 1,\dots,m_n$ unabhängig. Zeigen Sie, dass

$$\min_{j=1,\dots,m_n} X_{nj} \xRightarrow{n\to\infty} X$$

für $X \sim \text{geo}(1-e^{-\lambda})$.

(bitte wenden)

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, $X_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$ und X habe die Verteilungsfunktion $F(x) = \exp(-e^{-x})$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

a) $\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n$ und $\mathbb{P}(\min_{1\leq k\leq n} X_k \geq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq x)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) $n \min_{1\leq k\leq n} X_k \stackrel{d}{=} X_1$.

c) $\max\limits_{1\leq k\leq n} X_k - \log n \xRightarrow{n\to\infty} X$.