Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 7

Abgabetermin: 6.12.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße, von denen alle Momente endlich sind. Zeigen oder widerlegen Sie:
Die Menge $\mathcal{M} := \{x \mapsto x^n : n = 1, 2, ...\}$ ist separierend auf $\mathcal{P}'$, d.h.: Stimmen von zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$ alle Momente überein, so ist $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

Hinweis: Es sei $X \sim N(0,1)$ und f die Dichte von $Y = e^X$. Betrachten Sie die Dichte $g(x) := f(x)(1 + \sin(2\pi \log(x)))$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariable X heißt unendlich teilbar, wenn es für jedes $n = 1, 2, ...$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen $X_1, ..., X_n$ gibt mit $X_1 + \cdots + X_n \sim X$. Zeigen Sie:

a) $N(0,1)$ ist unendlich teilbar.

b) Sei $N \sim \text{Poi}(\lambda)$, sowie $Y_1, Y_2, ...$ unabhängig und identisch verteilt, und auch unabhängig von N. Dann ist die Verteilung von $Y_1 + \cdots + Y_N$ unendlich teilbar.

Aufgabe 27 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass eine Familie von Normalverteilungen genau dann straff ist, wenn die Familie der Parameter beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Überprüfen Sie $X_n \Longrightarrow X$ für $n \to \infty$ in den folgenden Fällen:

a) $Y_n \sim \mathrm{Poi}(n)$, $X_n := \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$ und $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

b) $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ mit $\mu_n \to \mu$ und $\sigma_n^2 \to 0$ sowie $X \sim \delta_\mu$, also $\mathbb{P}(X = \mu) = 1$.