Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 6

Abgabetermin: 29.11.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $X_0, \ldots, X_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen heißt die Verteilung von

$$\frac{X_0}{\sqrt{(X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n}}$$

t-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Zeigen Sie, dass diese für $n \to \infty$ schwach gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{i}{n}}$ definierte Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}([0,1])$ schwach gegen das Lebesguemaß auf $[0,1]$ konvergiert.

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Seien X, X_n und Y_n Zufallsvariablen mit Werten in einem metrischen Raum (M, r). Dabei seien X_n und Y_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert. Außerdem gelte, dass $X_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X$ und $r(X_n, Y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_p 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$Y_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X \,.$$

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Seien X und X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen, die nur Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen. Zeigen Sie

$$X_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(X_n = j) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = j).$$

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2018-2019/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2018-2019`