Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 4

Abgabetermin: 15.11.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Untersuchen Sie diese auf stochastische, $\mathbb{P}$-fast-sichere und $\mathcal{L}^p$-Konvergenz für alle $p \geq 1$. Ist $(X_n)_n$ gleichgradig integrierbar?

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Nennen Sie jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Menge A für die folgenden Identitäten:

a) $\mathbb{P}(\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\}) = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\})$.

b) $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\}) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{X_n \in A\})$.

c) $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{X_n \in A\}) = \mathbb{P}(\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\})$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Eine Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn $\liminf A_n \supset \limsup A_n =: A_\infty$. Zeigen Sie, dass für σ-Algebren $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{F}_n$ für alle n und (A_n) konvergent der Grenzwert der Mengenfolge, A_∞, in der terminalen σ-Algebra $\mathcal{T}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots)$ enthalten ist. In welchem Zusammenhang steht die Konvergenz von (A_n) mit der von (A_n^c)?

Hinweis: Der Limes inferior eines Mengensystems $(B_n)_{n\geq 1}$ ist gegeben durch

$$\liminf B_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} B_m.$$

Überlegen Sie sich zunächst, dass im Allgemeinen $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

(bitte wenden)

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch zum Parameter $\alpha > 0$ exponentialverteilten Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Zeigen Sie

$$\text{a) } \mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = \frac{1}{\alpha}\Big) = 1 \qquad \text{und} \qquad \text{b) } \mathbb{P}\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 0\Big) = 1.$$

Hinweis: Es ist $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\alpha}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ nur höchstens endlich viele der Ereignisse $\{\frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\alpha} + \varepsilon\}$ eintreten.