Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 1

Abgabetermin: 25.10.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das System der k-dimensionalen Quader

$$\mathcal{Q}^k := \{(a,b] \,|\, a, b \in \mathbb{R}^k,\ a \leq b\}.$$

ein Halbring ist, wobei für $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k), b = (b_1, b_2, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ das Intervall $(a, b]$ definiert ist durch

$$(a, b] := (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots (a_k, b_k].$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\mathcal{A} \subset 2^X$ ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra). Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y \,|\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \subset 2^Y$$

ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra) ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme jeweils einen Halbring, einen Ring oder eine σ-Algebra bilden.

- $\mathcal{A} := \{N \subset \mathbb{N} : |N| < \infty \vee |N^c| < \infty\}$,
- $\mathcal{B} := \{N \subset \mathbb{N} : |N| = \infty \vee |N^c| = \infty\}$,
- $\mathcal{C} := \{N \subset \mathbb{R} : |N| = \infty \wedge |N^c| = \infty\}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für alle integrierbaren $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \int_\mathbb{R} x \; d(f_*\mu)(x).$$

Hinweis: Durch geschicktes Zerlegen und Approximieren der Identität können Sie hierbei ähnlich wie bei *algebraischer Induktion* vorgehen.

Bonusaufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das System $\mathcal{C} := \{(-\infty, b] | \, b \in \mathbb{R}^k\}$ die Borelsche-σ Algebra $\mathcal{B}^k$ erzeugt.