Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 13

Abgabetermin: Freitag, 01.02.2019, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Eine Brownsche Brücke ist ein Gauss'scher Prozess $(X_t)_{0\le t\le 1}$ mit $X_0 = 0$, $\mathbb{E}[X_t] = 0$ und $\mathbb{E}[X_s X_t] = s \wedge t - st$ für alle $0 \le s, t \le 1$.

a) Zeigen Sie, dass für eine Standard-Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\ge 0}$ die Prozesse

$$\begin{aligned} X_t &:= (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}, \\ X'_t &:= B_t - tB_1, \end{aligned}$$

für $0 \le t \le 1$, jeweils Brownsche Brücken definieren.

b) Es sei umgekehrt $(X_t)_{0\le t\le 1}$ eine Brownsche Brücke. Zeigen Sie, dass durch

$$B_t := (t+1)X_{\frac{t}{t+1}}$$

eine Standard-Brownsche Bewegung definiert wird.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des Skohorodschen Einbettungssatzes den *Zentralen Grenzwertsatz von Lévy*, d.h. zeigen Sie für eine unabhängige identisch verteilte Folge von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\ge 1}$ mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$, dass

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{für } n \to \infty$$

wobei $Z \sim N(0,1)$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $B = \big(B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(k)}\big)_{t\ge 0}$ eine k-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung, die im Punkt $x = (x_1, \dots, x_k)$ startet, d.h. die einzelnen Komponenten $(B_t^{(i)})_{t\ge 0}$ sind jeweils voneinander unabhängige Brownsche Bewegungen mit $B_0^{(i)} = x_i$ fast sicher (oder äquivalent: $(B_t^{(i)} - x_i)_{t\ge 0}$ sind unabhängige Standard-Brownsche Bewegungen für alle $1 \le i \le k$).
Es gelte $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2} < r$ für ein $r > 0$, und $T_r := \inf\{t > 0 : \|B_t\|_2 = r\}$ sei der erste Zeitpunkt, an dem die Brownsche Bewegung die $k-1$-dimensionale Sphäre $S_r^{k-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_2 = r\}$ mit Radius r um den Ursprung erreicht.
Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T_r]$.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass $(\|B_t\|_2^2 - kt)_{t\ge 0}$ ein Martingal ist bzgl. der von B erzeugten Filtrierung $\mathbb{F}^B$ auf dem $\mathbb{R}^k$ (das sollte man sich kurz genauer überlegen).