Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 12

Abgabetermin: Freitag, 25.01.2019, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $W = (W_t)_{t\geq 0}$ und $W' = (W'_t)_{t\geq 0}$ Brownsche Bewegungen mit beliebigen Startpunkten x, y und $T := \inf\{t \geq 0 \mid W_t = 0\}$. Betrachten Sie nun $X = (X_t) := (W_{t\wedge T})$, eine bei 0 gestoppte, und $Y = (Y_t) := (|W'_t|)$. Zeigen Sie für alle $t, x, y > 0$, dass

$$\mathbb{P}_x(X_t \leq y) = \mathbb{P}_y(x \leq Y_t),$$

wobei $\mathbb{P}_x(\,\cdot\,) := \mathbb{P}(\,\cdot\,|W_0 = x)$ und $\mathbb{P}_y(\,\cdot\,) := \mathbb{P}(\,\cdot\,|W'_0 = y)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für eine Standard-Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ beide Seiten identisch sind zu $\mathbb{P}(B_t \geq x - y) + \mathbb{P}(B_t \geq x + y)$. Das Reflexionsprinzip kann hierbei hilfreich sein.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(\sup_{s\leq t} B_s > \sqrt{2t \log\log\log t}) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Widerspricht dies dem Gesetz des iterierten Logarithmus?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei wieder $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie, dass $(B_t)_{t\geq 0}$ fast sicher für jedes $0 < \varepsilon < 1$ mindestens eine Nullstelle in $(0, \varepsilon)$ hat.

b) Sei $A(\omega) := \{t \in [0, \infty) \mid B_t(\omega) = 0\}$. Zeigen Sie mit Hilfe der starken Markov-Eigenschaft und a), dass A fast sicher eine abgeschlossene Menge ohne isolierte Punkte ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie *ohne Verwendung des Gesetzes vom iterierten Logarithmus*:

a) Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und $(t_n)_{n\geq 1}$ eine fallende Nullfolge reeler Zahlen. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} = \infty \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

b) Folgern Sie aus a), dass die Pfade von B f.s. nicht lokal Hölder-stetig von der Ordnung $\gamma = \frac{1}{2}$ sind.