Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 11

Abgabetermin: Freitag, 18.01.2019, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie für eine Standard-Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$, dass fast sicher gilt

$$\lambda\big(\{t \geq 0 \mid B_t = 0\}\big) = 0.$$

Hinweis: Man zeige $\mathbb{E}[\lambda\big(\{t \geq 0 \mid B_t = 0\}\big)] = 0$. Begründen Sie, dass jeder stetige stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ als Abbildung $\mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ messbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und $Y_t := e^{-t/2} B_{e^t - 1}$. Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Gauss-Prozess sowie ein Markov-Prozess ist. Bestimmen Sie außerdem den schwachen Grenzwert von $\mathbb{P}^{Y_t}$ für $t \to \infty$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass ein Gauss-Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ genau dann ein Markov-Prozess ist, wenn $\mathrm{Cov}(X_s, X_u)\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)\mathrm{Cov}(X_t, X_u)$ für alle $s \leq t \leq u$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung sowie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und T_a die erste Treffzeit von a. Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}[T_a] = \infty$.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass für jedes $x > 0$ gilt $\mathrm{E}[e^{-xT_a}] = e^{-|a|\sqrt{2x}}$. Optional Sampling und Aufgabe 3 von Blatt 10 können nützlich sein.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$ und jede gegen 0 konvergente Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{L}\left(\frac{B_{t+h_n} - B_t}{h_n}\right) \xrightarrow{w} \frac{1}{2}\delta_{-\infty} + \frac{1}{2}\delta_{\infty} \quad \text{für } n \to \infty,$$

d.h. die Verteilungen der Differenzenquotienten $\frac{B_{t+h_n} - B_t}{h_n}$ konvergieren, aufgefasst als Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, schwach gegen die oben genannte Konvexkombination der Einpunktmassen in $-\infty$ und ∞.