Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 11.01.2019, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ die càdlàg-Modifikation des Poisson-Prozesses mit Intensität λ und $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Zeigen Sie mithilfe der zugrunde liegenden Faltungshalbgruppe $(\mathbb{P}_t)_{t\geq 0} = (\mathrm{Pois}(\lambda t))_{t\geq 0}$, dass der Poisson-Prozess nur Sprünge $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ der Höhe 1 haben kann.

Hinweis: Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von X genügt es, Zuwächse auf den dyadisch-rationalen Zahlen $(\frac{k}{2^n})_{k\geq 0, n\geq 0}$ (vgl. den Beweis von Satz 5.5 von Kolmogorov-Chentsov) zu betrachten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für $t \geq 0$ sei $X_t : ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}\cap[0,1]), \lambda([0,1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definiert durch

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t-\omega \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $(X_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal bzgl. der Filtration $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $t \geq 0$. Welche Stetigkeitseigenschaften haben die Pfade dieses Martingals?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Im folgenden sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung mit zugehöriger kanonischer Filtration $\mathcal{F}^B$.

a) Zeigen Sie, dass $(X_t^u)_{t\geq 0}$ mit $X_t^u := e^{uB_t - \frac{u^2}{2}t}$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}^B$ ist, für jedes $u > 0$.

b) Die Hermite-Polynome $H_n(x,t)$ sind definiert durch $H_n(x,t) := \frac{d^n}{du^n} e^{ux-\frac{u^2}{2}t}|_{u=0}$, so dass nach der Taylor-Formel

$$e^{ux-\frac{u^2}{2}t} = \sum_{n\geq 0} H_n(x,t)\frac{u^n}{n!}$$

gilt. Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 1$, $(H_n(B_t,t))_{t\geq 0}$ ein Martingal ist bzgl. $\mathcal{F}^B$ und berechnen Sie H_n für $n = 1,2,3,4$.

c) Definiere

$$G(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux-\frac{u^2}{2}t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Berechnen sie explizit $G(x,t)$ und zeigen Sie, dass $(G(B_t,t))_{t\geq 0}$ ein Martingal ist bzgl $\mathcal{F}^B$.

(bitte wenden)

Eine Weihnachtsaufgabe

Aufgabe 4 (4 Bonuspunkte)

Ein Affe tippt zufällig jede Sekunde einen der 26 Großbuchstaben auf einer Tastatur. Sei T die Zeit, zu der der Affe erstmalig das Wort ABRACADABRA getippt hat. Es wird behauptet, dass es im Mittel $\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26$ Sekunden dauert, bis der Affe das Wort erstmals getippt hat. Wie kann man dies mithilfe der Optional Sampling/Stopping Theorems einsehen?

HINWEIS: Konstruieren Sie ein faires Spiel, bei dem die Spieler ein Startkapital von 1€ haben und in jeder Runde ihr gesamtes Kapital darauf setzen, dass der Affe den jeweils nächsten korrekten Buchstabe des Wortes tippt (jeder neu hinzukommende Spieler setzt zunächst auf A).