Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 9

Abgabetermin: Freitag, 21.12.2018, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben seien $\alpha, \sigma^2 \in (0, \infty)$. Zeigen Sie:
Durch $K_t(x, \cdot) := N(xe^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}))$ für $t > 0$, $K_0(x, \cdot) := \varepsilon_x$ wird eine Halbgruppe von Markovkernen gegeben, d.h.:

$$K_{s+t}(x, B) = \int_{\mathbb{R}} K_t(y, B) K_s(x, dy) \qquad \forall (x, B) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B} \text{ und } s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Hinweis: Folgende Gleichung vereinfacht die Rechnung: $\int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{B-\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess mit den zusätzlichen Eigenschaften

a) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ für alle $t \geq 0$,

b) die Abbildung $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ ist stetig auf $\mathbb{R}_+$.

Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t \geq 0}$ eine rechtsseitig stetige Modifikation besitzt, falls die Filtrierung den üblichen Bedingungen genügt. Erfüllt diese Modifikation auch noch die Eigenschaften a) und b) ?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $(N(0, t))_{t \geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe bildet.

b) Wir nennen den Lévy-Prozess, der durch die Faltungshalbgruppe aus a) definiert ist, auch Standard Brownsche Bewegung. Zeigen Sie mithilfe von Satz 5.5, dass es eine Modifikation der Standard Brownschen Bewegung mit stetigen Pfaden gibt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $Z_1, Z_2, \ldots$ u.i.v mit $Z_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$. Sei weiter $N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 | \sum_{i=1}^n Z_i \leq t\}$. Zeigen Sie:

a) $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$,

b) $(\text{Pois}(\lambda t))_{t \geq 0}$ bildet eine stetige Faltungshalbgruppe, daher existiert ein Lévy-Prozess $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ mit $\tilde{N}_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$.

Wir nennen diesen Lévy-Prozess auch Poisson-Prozess zum Paramter λ.