

# Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

## Blatt 8

**Abgabetermin:** Freitag, 14.12.2018, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1  
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

### Aufgabe 1

(4 Punkte)

- Geben Sie einen stochastischen Prozess mit stetigen Pfaden an, dessen erzeugte Filtration nicht rechtsstetig ist.
- Sei  $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$  ein stochastischer Prozess mit rechtsseitig stetigen Pfaden. Geben Sie eine Modifikation  $\tilde{\mathcal{X}}$  von  $\mathcal{X}$  an, welche keine rechtsseitig stetige Pfade besitzt. Ist dann die Abbildung  $t \mapsto \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{X}}_t]$  rechtsseitig stetig?

### Aufgabe 2

(4 Punkte)

Ein auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  definierter stochastischer Prozess  $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$  heißt Gaußscher Prozess, falls  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  für alle  $n \geq 1$ ,  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$   $n$ -dimensional normalverteilt ist. Seien nun  $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Gamma : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  messbare Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

- $\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s)$  für alle  $s, t \geq 0$
- für  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  ist  $(\Gamma(t_i, t_j))_{i, j=1, \dots, t_n}$  nichtnegativ definit.

Zeigen Sie, dass ein Gaußscher Prozess  $\mathcal{X} = (X_t)_{t \geq 0}$  existiert mit  $\mathbb{E}[X_t] = \mu(t)$  und  $\text{Cov}(X_s, X_t) = \Gamma(s, t)$  für alle  $s, t \geq 0$ .

HINWEIS: Verwenden Sie den Satz von Kolmogorov 1.4

### Aufgabe 3

(4 Punkte)

Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E}, (X_t)_{t \geq 0}, E, \mathcal{B}(E))$  ein schwacher Markov-Prozess. Zeigen Sie, dass  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x, (X_t)_{t \geq 0}, E, \mathcal{B}(E))$  für festes  $x \in E$  ein elementarer Markov-Prozess ist.

HINWEIS: Verwenden Sie:  $\mathbb{P}_{X_s}(X_t \in B) = \mathbb{E}_x(\mathbb{P}_{X_s}(X_t \in B) | X_s)$   $\mathbb{P}_x$ -fast sicher. Warum gilt das?

**Aufgabe 4**

(4 Punkte)

Seien  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mu \in \mathbb{R}^n$  derart, dass  $\mu_j \geq 0$ ,  $Q_{ij} \geq 0$  für alle  $i, j$  und  $\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$ ,  $\sum_{j=1}^n Q_{ij} = 1$  für alle  $i$ . Sei ferner  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (X_t)_{t \in \mathbb{N}}, \{1, 2, \dots, n\}, \mathcal{B}(\{1, 2, \dots, n\}))$  ein elementarer Markov-Prozess mit

$$\mathbb{P}(X_0 = j) = \mu_j$$

und

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t) = Q_{X_t, j}$$

für alle  $j = 1, \dots, n$ ,  $t \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass für alle  $j = 1, \dots, n$ ,  $s, t \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t) = (Q^s)_{X_t, j}$$

und

$$\mathbb{P}(X_t = j) = (\mu Q^t)_j.$$