Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 7

Abgabetermin: Freitag, 07.12.2018, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Es sei $\mathcal{X} = (0)_{t\geq 0}$ der Prozess, der konstant 0 ist, $T \sim \mathrm{Exp}(1)$ und $\mathcal{Y} = (Y_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch $Y_t = \mathbb{1}_{\{T=t\}}$. Untersuchen Sie, ob es sich bei diesen beiden Prozesse um Versionen, Modifikationen bzw. ununterscheidbare Prozesse handelt.

b) Nennen Sie zwei Prozesse, die Versionen voneinander sind, aber keine Modifikationen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachte folgende Eigenschaften eines stochastischen Prozesses $\mathcal{X} = (X_t)_{t\geq 0}$:

1: X_t ist exponentialverteilt mit $\mathrm{Var}[X_t] > 0$ für $t > 0$.

2: Für $0 \leq t_0 < t_1 ... < t_n$ ist $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_{i=1,\dots,n}$ eine unabhängige Familie.

3: Für $0 \leq s < t$ ist $\mathbb{E}[X_t - X_s] = t - s$.

4: Für $0 \leq s < t$ ist $X_t - X_s \sim X_{t-s}$.

5: Es gibt eine Modifikation von $\mathcal{X}$ mit stetigen Pfaden.

6: Es gibt *keine* Modifikation von $\mathcal{X}$ mit stetigen Pfaden.

Beweisen Sie (durch Beispiel) oder widerlegen Sie: Es gibt einen stochastischen Prozess $\mathcal{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_0 = 0$ und den Eigenschaften

a) 1, 2, 4 b) 1, 2, 6 c) 1, 3, 5 d) 1, 3, 6

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(M_n)_{n\geq 0}$ ein nicht-konstantes Martingal bezüglich seiner natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_n) = \sigma(M_m | m \leq n)$ und für $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

$$X_t := M_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\big(M_{\lceil t \rceil} - M_{\lfloor t \rfloor}\big)$$

dessen lineare Interpolation.

a) Bestimmen Sie die natürliche Filtration $(\mathcal{G}_t) = \sigma(X_s | s \leq t)$ von $(X_t)_{t\geq 0}$.

b) Bildet $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal bezüglich dieser Filtration?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $(X_t)_{t\in T}$ und $(Y_t)_{t\in T}$ zwei stochastische Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und Y eine Modifikation von X. Zeigen Sie, dass X und Y ununterscheidbar sind, falls

a) T abzählbar ist

b) beide Prozesse fast sicher rechtsseitig stetige Pfade haben und $T \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.