Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 6

Abgabetermin: Freitag, 30.11.2018, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$, $\mu \in \mathbb{R}$ definieren wir in Erweiterung zu Aufgabe 4 von Blatt 5 die Verteilung $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ durch deren charakteristische Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \exp(-\sigma^\alpha |x|^\alpha (1 - i\beta(\text{sign } x)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu x) & \text{für } \alpha \neq 1, \\ \exp(-\sigma|x|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign } x)\ln(|x|)) + i\mu x) & \text{für } \alpha = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Verteilung *stabil* ist, d.h. wenn X_1, X_2 unabhängig und nach $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ verteilt sind, dann existieren zu jeden $a, b \in (0, \infty)$ zwei Zahlen $c \in (0, \infty)$, $d \in \mathbb{R}$ derart, dass $\mathcal{L}(aX_1 + bX_2) = \mathcal{L}(cX_1 + d)$. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass der Ausdruck oben tatsächlich die charakteristische Funktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.)

Bemerkung: Es gilt sogar die Umkehrung, d.h. jede stabile Verteilung ist von dieser Gestalt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In der Literatur werden charakteristische Funktionen φ unbegrenzt teilbarer Verteilungen oft auch durch die Khinchin-Darstellung

$$\psi(t) = \log(\varphi(t)) = ita + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2} \right) \frac{1 + x^2}{x^2} \mu(dx)$$

angegeben, wobei $a \in \mathbb{R}$ und μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $\mu(\{0\}) = \sigma^2$ ist.
Zeigen Sie, dass diese Darstellung äquivalent zu der in der Vorlesung bewiesenen Lévy-Khinchin Formel ist, indem Sie explizit angeben, wie man (a, μ) aus dem kanonischen Tripel (b, σ^2, ν) erhalten kann und umgekehrt.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass $f_t(x) = \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}$ für festes t eine stetige beschränkte Funktion in x ist. Was ist $f_t(0)$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde indirekt (Beweis von Satz 4.10) gezeigt, dass die charakteristische Funktion $\varphi_{\mathbb{P}}$ einer unbegrenzt teilbaren Verteilung $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ keine Nullstellen hat.
Folgern sie dies direkt aus der Darstellung $\varphi_{\mathbb{P}}(t) = (\varphi_n(t))^n$, $\forall n \geq 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion der Gamma-Verteilung $\Gamma(\lambda, \beta)$, deren Dichte gegeben ist durch

$$f_{\Gamma(\lambda,\beta)}(x) = \frac{\beta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}$$

und folgern Sie aus dem erhaltenen Ergebnis, dass die Familie der Gamma-Verteilungen unbegrenzt teilbar ist.

b) Zeigen Sie, dass das kanonische Tripel der Gamma-Verteilung gegeben ist durch $(b_\Gamma, 0, \nu_\Gamma)$ (der Drift b_Γ soll hierbei noch berechnet werden), wobei das Lévy-Maß ν_Γ die Dichte

$$f_{\nu_\Gamma}(x) = \frac{\lambda}{x} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}$$

bezüglich des Lebesguemaßes hat.

Hinweis: Logarithmieren Sie dazu die in a) erhaltene charakteristische Funktion $\varphi(t)$ und zeigen Sie, dass deren Ableitung nach t mit der Ableitung $\psi'(t)$ der Lévy-Khinchin Darstellung (mit eingesetzten ν_Γ) übereinstimmt, wenn man b_Γ passend wählt.