Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 4

Abgabetermin: Freitag, 16.11.2018, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $p, X_0 \in (0,1)$ und $\mathcal{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $[0,1]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: Gegeben $X_0, \dots X_n$ ist

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1-p+pX_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } X_n \\ pX_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-X_n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}$ ein Martingal ist und fast sicher und in $\mathcal{L}^1$ konvergiert. Bestimmen Sie außerdem die Verteilung des Grenzwertes $X_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

Hinweis: Betrachten Sie für den letzten Teil den Prozess $\big(X_n(1-X_n)\big)_n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Geben Sie ein Martingal $(M_n)_{n\geq 1}$ an mit $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty$ fast sicher.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\mathrm{Var}[X_i] < \infty$. Zeigen Sie mithilfe des Martingalkonvergenzsatzes das starke Gesetz der großen Zahlen für $(X_n)_{n\geq 1}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass ein Martingal $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$, für das $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ gilt, nicht notwendigerweise in $\mathcal{L}^1$ konvergiert.
   Hinweis: Ein solches Martingal lässt sich aus einer Folge $(Y_n)_{n\geq 1}$ unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{1}{2}$ zusammenbauen.

b) Sei $(Z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Zeigen Sie, dass die Folge in $\mathcal{L}^1$ konvergiert, aber nicht fast sicher.
   Hinweis: Bei der Widerlegung der fast sicheren Konvergenz kann das Borel-Cantelli-Lemma hilfreich sein.

c) Gibt es ein Martingal $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$, das in $\mathcal{L}^1$, aber nicht fast sicher konvergiert?