Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 09.11.2018, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 4 vom letzten Übungsblatt.
Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1-p$. Seien $S_0 := 0$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ sowie $a < 0 < b \in \mathbb{Z}$ und $T_{a,b} := \min\{n \geq 1 \mid S_n \in \{a, b\}\}$. Zeigen Sie, dass für $p \neq q$ gilt

$$\mathbb{P}(S_T = a) = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}}, \qquad \mathbb{E}[T_{a,b}] = \frac{b}{p-q} - \frac{b-a}{p-q} \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ und $S_n - n(p-q)$ Martingale bzgl. geeignet gewählter Filtrierungen sind. Sie dürfen ohne Beweis voraussetzen, dass $\mathbb{E}[T_{a,b}] < \infty$ (das kann man analog wie auf dem letzten Aufgabenblatt einsehen).

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige, identisch verteilte, nicht-negative ganzzahlige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$ sowie $S_k := \sum_{i=1}^k Y_i$ für $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbb{P}(S_k < k \text{ für alle } 1 \leq k \leq n \mid S_n) = \left(1 - \frac{S_n}{n}\right)^+.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an Beispiel 2.3 f) der Vorlesung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Der Gewinn bei einem Einsatz von $c \geq 0$ im n-ten Spiel sei cY_n, $n \geq 1$, wobei $(Y_n)_{n\geq 1}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen seien mit $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_n = -1) = q = 1 - p$ und $\frac{1}{2} < p < 1$. Der Einsatz C_n, $n \geq 1$, beim n-ten Spiel liege zwischen 0 und W_{n-1}, wobei W_{n-1} wie in Beispiel 2.19 b) der Vorlesung der „Kontostand“ bzw. Gesamtgewinn nach $n - 1$ Spielen ist. Sei N eine fest vorgegebene natürliche Zahl, W_0 eine positive Konstante („Startkapital“) sowie $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.
Zeigen Sie, dass für jede vorhersehbare Strategie $(C_n)_{n\geq 1}$ die Folge

$$(\log(W_n) - n\alpha)_{n\geq 1} \quad \text{mit } \alpha = p\log(p) + q\log(q) + \log(2)$$

ein Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ ist, so dass stets $\mathbb{E}[\log(W_N/W_0)] \leq N\alpha$ gilt (warum?).
Gibt es eine optimale Strategie $(C_n)_{1\leq n\leq N}$, für die $\mathbb{E}[\log(W_N/W_0)] = N\alpha$ gilt? Wenn ja, wie lautet diese?

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien wie in Beispiel 2.3 e) der Vorlesung $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, integrierbarer Zufallsvariablen, die nicht fast sicher konstant sind, und $L(\lambda) := \mathbb{E}[e^{\lambda Y_1}] < \infty$ für alle $\lambda \in (-\delta, \delta)$ mit einem $\delta > 0$. Definiere $\psi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ mit $\psi(\lambda) = \log\bigl(L(\lambda)\bigr)$ und setze $X_n^\lambda := e^{\lambda \sum_{i=1}^n Y_i - n\psi(\lambda)}$ für $n \geq 0$. Dann ist nach Beispiel 2.3 e) $(X_n^\lambda)_{n\geq 0}$ ein Martingal für jedes $\lambda \in (-\delta, \delta)$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $\psi(\lambda)$ ist strikt konvex auf $(-\delta, \delta)$.

b) $\mathbb{E}\bigl[\sqrt{X_n^\lambda}\bigr] \to 0$ für $n \to \infty$ und $\lambda \neq 0$.

c) $X_n^\lambda \to 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher für $n \to \infty$ und $\lambda \neq 0$.