Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 2

Abgabetermin: Freitag, 02.11.2018, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Supermartingal bzgl. einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ und $\mathbb{E}[X_N] \geq \mathbb{E}[X_0]$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$, dann ist $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ ein Martingal. Gibt es eine Folge $(N_n)_{m\geq 1}$ mit $N_m \to \infty$ für $m \to \infty$, so dass $\mathbb{E}[X_{N_m}] \geq \mathbb{E}[X_0]$, dann ist $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Ein auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1})$ definierter reellwertiger, adaptierter stochastischer Prozess $(X_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann ein Martingal, falls für alle beschränkten Stoppzeiten T gilt, dass $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_1]$.

   Hinweis: Betrachten Sie für die Rückrichtung Stoppzeiten der Form $T = m \cdot \mathbb{1}_{A^c} + n \cdot \mathbb{1}_A$ mit $1 \leq m < n$ und $A \in \mathcal{F}_m$.

b) Ist $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zufallsvariablen, die $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[\varphi(|X_n|)] < \infty$ erfüllt für eine monoton wachsende, konvexe Funktion $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$, dann ist die Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ gleichgradig integrierbar.

c) Von der Aussage in Teil b) gilt auch die Umkehrung, d.h. die Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann gleichgradig integrierbar, wenn es eine Funktion φ mit den o.g. Eigenschaften gibt (das müssen Sie nicht beweisen!).

   Folgern Sie mit Hilfe dieser Aussage, dass $(X_n)_{n\geq 1}$ genau dann ein gleichgradig integrierbares Martingal ist, wenn die Familie $\{X_T \mid T \textit{ endliche Stoppzeit}\}$ gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ ein nicht-negatives Submartingal. Zeigen Sie, dass für alle $c > 0$ und alle $n \geq 1$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq k\leq n} X_k \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_n]}{c}.$$

Hinweis: Definieren Sie sich zwei geeignete, beschränkte Stoppzeiten und verwenden Sie das Optional Sampling Theorem.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Seien $S_0 := 0$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ sowie $a < 0 < b \in \mathbb{Z}$ und $T_{a,b} := \min\{n \geq 1 \mid S_n \in \{a, b\}\}$ der erste Zeitpunkt, an dem die Summenfolge entweder a oder b erreicht.

a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $\mathbb{P}\big(T_{a,b} > n(b-a)\big) \leq \big(1 - \frac{1}{2^{b-a}}\big)^n$.

b) Folgern Sie aus a), dass $\mathbb{E}[T_{a,b}] < \infty$.

c) Folgern Sie aus b) $\mathbb{P}(S_{T_{a,b}} = a) = \frac{b}{b-a}$.

d) Sei nun $T_a := \min\{n \geq 1 \mid S_n = a\}$ der erste Zeitpunkt, an dem der Summenprozess a erreicht. Folgern Sie aus c), dass $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$, aber $\mathbb{E}[T_a] = \infty$.

Hinweis: Wenn Sie nur einzelne Teilaufgaben bearbeiten, dürfen Sie die benötigten Ergebnisse der vorhergehenden auch ohne Beweis verwenden. Bei c) und d) kann die Waldsche Identität helfen.