Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Blatt 1

Abgabetermin: Freitag, 26.10.2018, bis 10.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sie T eine Stoppzeit bzgl. einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. Die *$\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_{T^-}$ der Vergangenheit strikt vor T* ist definiert durch

$$\mathcal{F}_{T^-} := \sigma\big(\big\{F \cap \{t < T\} \mid F \in \mathcal{F}_t,\, t \in I\big\} \cup \mathcal{F}_0\big).$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{F}_{T^-} \subseteq \mathcal{F}_T$.

b) T ist $\mathcal{F}_{T^-}$-messbar.

c) Sei S eine weitere Stoppzeit bzgl. $\mathbb{F}$ mit $S \leq T$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{S^-} \subseteq \mathcal{F}_{T^-}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien S, T zwei Stoppzeiten bzgl. einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $A \in \mathcal{F}_S \implies A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.

b) Folgern Sie aus a), dass gilt: $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. Zeigen Sie ferner, dass $\mathcal{F}_{S\wedge T}$ die Mengen $\{S \leq T\}$, $\{T \leq S\}$, $\{S < T\}$, $\{T < S\}$ und $\{S = T\}$ enthält.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $(T_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Stoppzeiten bzgl. einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. Zeigen Sie, dass dann auch $T := \sup_{n\geq 1} T_n$ eine Stoppzeit bzgl. $\mathbb{F}$ ist.

b) Sei $(T_n)_{n\geq 1}$ eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten bzgl. $\mathbb{F}$ und $T := \lim_{n\to\infty} T_n$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{F}_{T^-} = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_{T_n^-}\right).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Sei $X = (X_n)_{n\geq 1}$ ein auf einem Wahrscheinllichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierter, zeitdiskreter reellwertiger stochastischer Prozess und $\mathbb{F} = \sigma(X)$ die von X erzeugte Filtrierung. Zeigen Sie: Ist der Prozess $(S_n)_{n\geq 1}$ mit $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$, so gilt $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$ für alle $i \neq j$.

b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierte, reellwertige, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. Ferner seien $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ und $Y_n := \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - n\sigma^2$. Zeigen Sie, dass der Prozess $Y = (Y_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ ist.