Übungen zur Vorlesung „Stochastische Prozesse“

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1

Zeigen sie:

a) $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ $\mathbb{P}$-f.s., falls X, Y stochastisch unabhängig sind.

b) Aus $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ folgt nicht, dass X, Y stochastisch unabhängig sind.
HINWEIS: Betrachten Sie hierzu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$ und $Y = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}$.

c) X, Y sind stochastisch unabhängig, falls für alle Borel-messbaren Funktionen g mit $\mathbb{E}[|g(X)|] < \infty$ gilt
$$\mathbb{E}[g(X)|Y] = \mathbb{E}[g(X)]$$

Aufgabe 2

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Poi(λ)-verteilter Zufallsvariablen und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Finden Sie eine monoton wachsende, reellwertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $(S_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. der Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie die folgende Aussage:
Ist I höchstens abzählbar und $X = (X_t)_{t\in I}$ adaptiert an $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ sowie T eine Stoppzeit bzgl. $\mathbb{F}$, dann ist der gestoppte Prozess $X^T \cdot \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ messbar bzgl. $\mathcal{F}_T$.