Stochastik (1. Teil) **WS 2018/2019**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2018-2019/vorlesung-stochastik-ws-2018-2019

Übung 7

Abgabe: 28.01.2019 in die entsprechenden Briefkästen bis 14 Uhr(siehe Homepage).

Folgende Überlegungen könnten für dieses Übungsblatt hilfreich sein:

Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Menge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$. Nehmen Sie an das diese Zufallsvariablen paarweise unabhängig sind. Was können Sie dann über $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ sagen? Was über $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i)$?

Aufgabe 1 (1+3 Punkte)**.**

1. Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise unkorrelierte, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mu_n := \mathbb{E}[X_n]$, $\sigma_n^2 := \mathrm{Var}(X_n)$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 0$. Zeigen Sie, dass
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$
(Zur Erinnerung: $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ bedeutet, dass die Folge $(Y_n)_{n\geq 1}$ stochastisch gegen Y konvergiert.)

2. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$ und
$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln n}, \qquad \text{für } n \geq 2.$$
Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe a): (X_n) genügt dem schwachen Gesetz großer Zahlen, d.h.
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen mit $0 < \mathrm{Var}(X_n) \leq c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, für die gilt
$$\varrho_{ij} := \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\,\mathrm{Var}(X_j)}} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } |i-j| \to \infty.$$
Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, d.h.
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=0}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \right| > \epsilon \right) = 0 \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Tschebyschevsche Ungleichung.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Gegeben Sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Auf diesem sei die Folge $(Z_n)_{n\geq 1}$ von Zufallsvariablen gegeben mit

$$P(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} = 1 - P(Z_n = 0),$$

wobei $\alpha \in (0, 1]$. Zeigen oder widerlegen Sie

(a) $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$,

(b) $Z_n \to 0$ fast sicher.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.** Geben Sie für die folgenden Punkte jeweils ein geeignetes Beispiel durch Angabe von Wahrscheinlichkeitsraum und Folge von Zufallsvariablen an. Verifizieren Sie auch ihr Beispiel!

(a) Eine Folge von Zufallsvariablen die im Erwartungswert konvergieren aber nicht fast sicher.

(b) Eine Folge von Zufallsvariablen die fast sicher konvergieren aber nicht im Erwartungswert.

Hinweis: Eine Folge von Zufallsvariablen X_n konvergiert gegen eine Zufallsvariable X im Erwartungswert falls gilt

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] \to 0, \text{ für } n \to \infty.$$