Stochastik (1. Teil) **WS 2018/2019**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2018-2019/vorlesung-stochastik-ws-2018-2019

Übung 6

Abgabe: 14.01.2019 in die entsprechenden Briefkästen bis 14 Uhr(siehe Homepage).

Sei $\Omega = \{\omega_i : i \in I\}$ ein Zustandsraum mit I höchstens abzählbar und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf diesem. Ferner seien X, Y zwei $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen. Mit $\mathbb{P}^{(X,Y)}$ bezeichnen wir die gemeinsame Verteilung von X und Y auf $\mathbb{R}^2$, d.h. es gilt für $A, B \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}^{(X,Y)}((X,Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(\omega : X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B).$$

Wir definieren die Kovarianz von X und Y durch

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])],$$

wobei der Erwartungswert bzgl. des Maßes $P^{(X,Y)}$ berechnet wird. Insbesondere ist dann $\mathrm{Cov}(X,X)$ die Varianz von X. Die Korrelation (bzw. der Korrelationskoeffizient) $\varrho_{X,Y}$ von X und Y ist gegeben durch

$$\varrho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}},$$

wobei man häufig die Wurzel der Varianz als Standardabweichung bezeichnet.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibe das Ergebnis des ersten Wurfes, Y das Ergebnis des zweiten. $\mathbb{P}^{(X,Y)}$ ist also die Laplaceverteilung auf $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$. Bestimmen Sie für $Z = \max(X, Y)$ den Korrelationskoeffizienten $\varrho_{X,Z}$ von X und Z.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[Z]$, $\mathbb{E}[Z^2]$, $\mathrm{Cov}(X,Z)$ und die Standardabweichungen von X und Z.
Sie dürfen die folgenden Formeln (ohne Beweis) verwenden:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

(a) Es seien X und Y unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$Z = \begin{cases} \frac{X}{Y} & : Y \neq 0 \\ 0 & : Y = 0 \end{cases}$$

Cauchy-verteilt mit Parameter 1 ist.

(b) Es sei U eine auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ uniformverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\tan(U)$ Cauchy-verteilt mit Parameter 1 ist.

Hinweis: Sie dürfen bei dieser Aufgabe die Reihenfolge der Integration ohne Begründung vertauschen, d.h. für ein Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und Intervallen I_1, I_2 dürfen Sie ohne Begründung nutzen:

$$\int_{I_1}\int_{I_2} h(x,y)dxdy = \int_{I_2}\int_{I_1} h(x,y)dydx$$

Bitte wenden

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien X und X_n, $n \in \mathbb{N}$, integrierbare Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] < \infty$$

folgt, dass X_n fast sicher gegen X konvergiert, i.e.

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei f eine stetige Funktion auf $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$. Sei für $n \geq 1$ das Polynom f_n durch

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq p\leq 1} |f(p) - f_n(p)| = 0$$

gilt. *Hinweis: Verwenden Sie das ϵ-δ-Kriterium für stetige Funktionen mit $|\frac{k}{n} - p| < \delta$. Für Terme mit $|\frac{k}{n} - p| \geq \delta$ kann die Tschebyschevsche Ungleichung helfen. (Warum?)*

Aufgabe 5 (1+1+2 Weihnachtsbonuspunkte)**.** Zeigen, bzw. bestimmen Sie:

(a) Für jede Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ und $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\mathbb{P}(X \geq n)$$

Es seien X und Y quadrat-integirerbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P).

(b) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(a) = E(X-a)^2,\ a \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $g(a,b) = E(X - bY - a)^2,\ a, b \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6 (2 Bonuspunkte)**.** Gegeben seien iid Zufallsvariablen X_i, Y_i mit $i \in \{1, \ldots, N\}$ und $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sei $\Delta_t = 1/N$. Definiere für $n \in \{0, \ldots, N\}$ die Zufallsvariablen (mit der Konvention $X_0 = Y_0 = 0$)

$$S_n^X = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\Delta_t} X_i, \quad S_n^Y = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\Delta_t} Y_i.$$

Sei nun $\varrho \in [-1, 1]$. Definiere $Z_n = \varrho S_n^X + \sqrt{1-\varrho^2} S_n^Y$.

Schreiben Sie eine R-Funktion die als Funktionsparameter N akzeptiert und ihnen S_n^X, S_n^Y und Z_n für $n \in \{0, \ldots, N\}$ simuliert. Die Funktion soll Ihnen ferner die Funktionen (für eine Simulation) $(n/N) \mapsto S_n^X$, $n \mapsto S_n^Y$ und $n \mapsto Z_n$ in einem Fenster plotten (bitte unterschiedliche Farben pro Linien-plot). Beschreiben Sie was Sie sehen ($N = 10^4$, $\varrho = 0.8$). Was können Sie über die Kovarianzen der verschiedenen Zufallsvariablen sagen?

Drucken Sie Ihren Code aus und fügen Sie den Ausdruck Ihrer Abgabe bei. Schicken Sie ferner Ihrem Tutor ein ausführbares Skript Ihrer Abgabe per E-Mail zu.

Wir wünschen Ihnen allen ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!