UNI FREIBURG

Stochastik (1. Teil) **WS 2018/2019**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2018-2019/vorlesung-stochastik-ws-2018-2019

Übung 5

Abgabe: 17.12.2018 in die entsprechenden Briefkästen bis 14 Uhr(siehe Homepage).

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei X eine Normalverteilte Zufallsvariable, i.e. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx,$$

wobei φ die Dichte von X ist. Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Wert von

$$\mathbb{E}\left[X^n\right].$$

Aufgabe 2 (1 + 2 + 3 Punkte)**.** Sei Φ eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_\Phi(x) = c_1 \mathbb{1}_{[-\pi,\pi)}(x)$$

und Θ eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_\Theta(x) = c_2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x),$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind und $x \in \mathbb{R}$.
Dann ist durch $G(\Phi, \Theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \cos\Phi + y \sin\Phi = \Theta\}$ eine zufällige Gerade im $\mathbb{R}^2$ beschrieben, wobei Θ den Abstand der Gerade vom Ursprung angibt.

(a) Bestimmen Sie c_1 und c_2 so, dass f_Φ und f_Θ auch wirklich Dichten sind.

(b) Für ein festes $r \in [0, \infty)$ sei $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P(G(\Phi, \Theta)) \cap K_r \neq \emptyset).$$

(c) Für feste $\varrho \in [0, \pi]$ sei $L_\varrho = \{(\cos\alpha, \sin\alpha)\mathbb{R}^2 | \alpha \in [-\varrho/2, \varrho/2)\}$. Bestimmen Sie die Wahtscheinlichkeit

$$P(G(\Phi, \Theta) \cap L_\varrho \neq \emptyset)$$

Hinweis: Zeichnen Sie sich für festes Θ die Extremfälle auf, in denen $G(\Phi, \Theta)$ den Kreisbogen L_ϱ noch schneidet.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\left[|X_1|\right] = +\infty$. Zeigen Sie

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad \text{existiert und ist endlich}\right) = 0.$$

Zeigen Sie zunächst, dass

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0\right) = 0$$

gilt und nutzen Sie die Eigenschaft $A \subset B, P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$.

Bitte wenden

Hinweis: Sie dürfen ohne es zu beweisen folgendes Lemma benutzen: Sei $Z \geq 0$ eine Zufallsvariable. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq n) \leq \mathbb{E}\left[Z\right] \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq n)$$

Aufgabe 4 (0.5+0.5 Bonuspunkte)**.** Schreiben Sie eine R-Funktion welche Ihnen 1000 auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen generiert und aus diesen mit Hilfe der Quantilfunktionen der

(a) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1$

(b) Standardnormalverteilung

Zufallsvariablen berechnet die dann Exp(1) bzw. $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt sind. Ferner Soll das Skript ein Histogramm dieser berechnteten Werte plotten (normalisiert zu 1) und mit den entsprechenden Dichten vergleichen indem diese in das selbe Bild geplottet werden. Dazu dürfen Sie die Funktionen *qexp* und *qnorm* benutzen. Drucken Sie Ihren Code aus und fügen Sie diesen Ausdruck Ihrer Abgabe bei und schicken Sie ferner Ihrem Tutor ein ausführbares Skript Ihrer Abgabe per E-Mail zu.