UNI FREIBURG

Stochastik (1. Teil)

WS 2018/2019

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2018-2019/vorlesung-stochastik-ws-2018-2019

Übung 4

Abgabe: 03.12.2018 in die entsprechenden Briefkästen bis 14 Uhr(siehe Homepage).

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_8\}$. Bestimmen Sie die kleinste σ-Algebra die die Menge(n)

(a) $A = \{\omega_1, \omega_3\}$,

(b) $A = \{\omega_1\}$, $B = \{\omega_i : i \in \{2, 4, 6, 8\}\}$,

(c) $A_i = \{\omega_i\}$ für alle $i = 1, \dots, 8$,

(d) $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $B = \{\omega_6, \omega_7\}$

enthält.

Aufgabe 2 (4 Punkte + 2 Bonuspunkte für R-Aufgabe). Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablenmit mit Verteilung
$P(X_i = u) = 1 - P(X_i = d) = p$, wobei $p \in (0, 1)$ und $0 < d < 1 < u$. Definiere für $S_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben, die Zufallsvariablen

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1.$$

Wir betrachten das Ereignis $A = \{S_n = k\}$, wobei wir $P(A) > 0$ annehmen. Bestimmen Sie p so, dass für alle solche A gilt

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}|A\right] = k.$$

Für dieses p, berechnen Sie für $n = 4$

$$\mathbb{E}\left[\max(S_n - S_0, 0)\right].$$

Schreiben Sie nun ein R programm welches den obigen Ausdruck ausrechnet, wobei die Parameter n, d, u als Eingabewerte übergeben werden (p wird wie oben fest bestimmt und ist kein Parameter der dem Programm übergeben werden muss).

Aufgabe 3 (3 Punkte). Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Disjunkte Ereignisse können unabhängig sein.

(b) Ereignisse können zu sich selbst unabhängig sein.

(c) Aus $P(B|A) > P(B)$ und $P(C|B) > P(C)$ folgt $P(C|A) > P(C)$. Nehmen Sie $P(A), P(B) > 0$ an.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei X Exp(λ_1) verteilt und Y Exp(λ_2). Ferner seien beide unabhängig voneinander. Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen Z mit

(a) $Z = \min(X, Y)$

(b) $Z = \max(X, Y)$

(c) $Z = X + Y$

(d) $Z = X^2$

Hinweis: Für eine Zufallsvariable, die Werte in $\mathbb{R}^2$ annimmt, also einen zweidimensionalen Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$, ist die Verteilungsfunktion F definiert durch

$$F(s, t) = P(X_1 \leq s, X_2 \leq t).$$

Der Zufallsvektor heißt absolutstetig, falls ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert mit

(i) $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = 1$

(iii) $F(s, t) = \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{t} f(x_1, x_2)dx_2dx_1$.

Die Funktion f heißt Dichte von X bzw. die gemeinsame Dichte von X_1 und X_2.

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Sei X ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Dichte f. Zeigen Sie dass die beiden Komponenten genau dann unabhängig zueinander sind, wenn gilt

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2),$$

wobei f_1 und f_2 beides Dichten eindimensionaler Zufallsvariablen sind mit

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 = 0.$$

Hinweis: Es reicht die Unabhängigkeitsbedingung für abgeschlossene Intervalle zu zeigen.