UNI FREIBURG

Stochastik (1. Teil) **WS 2018/2019**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2018-2019/vorlesung-stochastik-ws-2018-2019

Übung 2

Abgabe: 05.11.2018 in die entsprechenden Briefkästen bis 14 Uhr(siehe Homepage).

Aufgabe 1 (1 Punkt)**.** Gegeben sei Ω. Wir nehmen an das Ω maximal abzählbar unendlich ist. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω definieren wir nun den Erwartungswer einer Zufallsvariablen $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega).$$

Zeigen Sie (wir nehmen an $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ und $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$)

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y], \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Ein fairer Würfel wird vier mal geworfen. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Grundraum und Wahrscheinlichkeitsmaß) an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) das Maximum der erhaltenen Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist,
(b) das Maximum der erhaltenen Augenzahlen gleich 4 ist,
(c) das Minimum der erhaltenen Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist,
(d) das eine strikt absteigende Folge geworfen wird.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Für $(A_i)_{i=1}^n, A_i \subset \Omega\ \forall i$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P, zeigen Sie

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Formel für kleine n und führen Sie dann Induktion durch.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)**.** Eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ der Länge n ist eine Bewegung auf $\mathbb{Z}$ in der pro Schritt die Position sich nur um der Wert $+1$ oder -1 verändert. Eine Bewegung kann daher identifiziert werden mit einem $n+1$-Tupel $(S_0, \ldots, S_n)$, wobei S_i die Position im Schritt i ist. Insbesondere gilt

$$S_{k+1} - S_k \in \{-1, 1\} \qquad \forall k = 0, \ldots, n-1.$$

Sei $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{-1, 1\}\}$. Definiere die Zufallsvariable $X_k(\omega) = x_k$. Fixiert man einen Startwert S_0, so kann jede Irrfahrt mit Startwert S_0 eindeutig dargestellt werden durch

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega).$$

Fixiere S_0. Sei P die Gleichverteilung auf Ω, d.h.

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^n}.$$

Bitte wenden

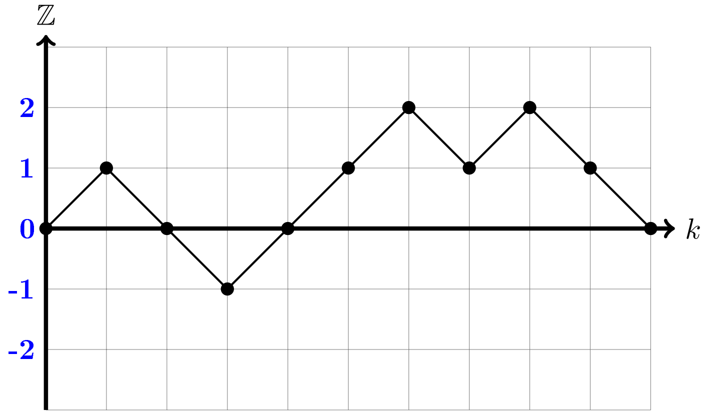

Abbildung 1: Beispiel eines Pfades der Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ beginnend im Ursprung. Hier ist $S_0 = 0$.

Ein möglicher Pfad einer sollchen Irrfahrtmit $S_0 = 0$ findet sich in Abbildung 1.

(a) Zeigen Sie

$$P(S_{l+1} - S_l = i \cap S_l - S_{l-1} = j) = P(S_{l+1} - S_l = i)P(S_l - S_{l-1} = j),$$

wobei $i, j \in \{-1, 1\}$. Diese Eigenschaft werden wir später als Unabhängigkeit kennenlernen.

(b) Bestimmen Sie $P(S_n = b)$ für $b \in \mathbb{Z}$ beliebig für $S_0 = 0$.

Wir setzen nun allgemein $S_0 = a$. P ist weiterhin die Gleichverteilung auf Ω. Bezeichne $N(a, b)$ die Anzahl der Pfade in Ω mit $S_0 = a$ und $S_n = b$. Ferner bezeichne $N^{\neq 0}(a, b)$ die Anzahl jener Pfade die zu keinem Zeitpunkt $i > 0$ den Ursprung berühren. Entsprechend ist $N^0(a, b)$ die Anzahl jener, die den Ursprung zu einem Zeitpunkt $i > 0$ berühren.

(c) Zeigen Sie $N^0(a, b) = N(-a, b)$ für $a, b > 0$.

(d) Zeigen Sie $N^{\neq 0}(a, b) = N(a, b) - N(-a, b)$ für $a, b > 0$.

Die letzten beiden Resultate werden als Spiegelungsprinzip bezeichnet.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Gegeben sei der Grundraum Ω, $\mathcal{A} = \text{Pot}(\Omega)$ die Potenzmenge und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω. Das Trippel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ nennen wir auch Wahrscheinlichkeitsraum. Gegeben sei eine Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ sodass $A_i \subset A_{i+1}$ gilt für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgende Eigenschaft, die man auch Stetigkeit von unten nennt:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\ \Big) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Aufgabe 6 (2 Bonuspunkte)**.** Schreiben Sie ein R-Skript, welches 1000 Irrfahrten wie oben ($S_0 = 0$) simuliert mit $n = 10$ und bestimmt, wie viele dieser 1000 Pfade die 0 berühren, i.e. es existiert ein $i \in \{1, \dots, 10\}$ so dass $S_i = 0$ gilt. Was erwarten Sie hier für eine Zahl in etwa?

Hinweis: Betrachten wir einen Grundraum $\tilde{\Omega} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\}$ mit der Gleichverteilung $\tilde{\mathbb{P}}$ und der Zufallsvariable $\tilde{X}(\omega) = \omega$, so kann man in R eine Realisierung von $\tilde{X}$ simulieren durch die Funktion `rbinom(n,1,0.5)`. Ferner kann für Sie die R-Funktion `cumsum` nützlich sein. Drucken Sie den Quellcode Ihrer Abgabe aus und legen Sie diesen Ihrer Abgabe bei. Schicken Sie zusätzlich das Skript als E-Mail Anhang an Ihren Tutor.