Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 14

Abgabetermin: Mittwoch, 06.02.2019, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass im linearen Modell mit koordinatengebundener Darstellung gemäß Definition 5.2.1 der Vorlesung der Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\beta}$ aus Definition 5.2.8 mit dem Maximum-Likelihhod-Schätzer $\hat{\beta}_{ML}$ übereinstimmt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie die in Beispiel 5.3.9 der Vorlesung genannten Resultate für die einfache lineare Regression mit $A = (\,\mathbb{1}\ y\,) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$:

a) $\{v_1, v_2\}$ mit $v_1 = \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{n}}$ und $v_2 = \frac{y-\overline{y}\mathbb{1}}{\sqrt{n-1}s_y}$ ist eine Orthonormalbasis von $W = \mathrm{lin}\{\mathbb{1}, y\}$ (mit $s_y^2 = \frac{1}{n-1}\|y - \overline{y}\mathbb{1}\|^2$ nach Bemerkung 5.1.3).

b) Zeigen Sie, dass gilt $\Pi_W X = \left(\overline{X} - \frac{s_{yX}}{s_y^2}\overline{y}\right)\mathbb{1} + \frac{s_{yX}}{s_y^2}y$.

c) Zeigen Sie, dass der die Gleichung $A\hat{\beta} = \hat{\zeta}$ lösende Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ in diesem Fall gegeben ist durch $\hat{\beta}_1 = \frac{s_{yX}}{s_y^2}$ und $\hat{\beta}_0 = \overline{X} - \hat{\beta}_1\overline{y}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie die Lemmata 5.4.4 und 5.4.5 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unkorrelierte Zufallsvariablen mit Erwartungswerten $\mathbb{E}_\vartheta[X_i] = c_i\mu(\vartheta)$ und Varianzen $\mathrm{Var}_\vartheta[X_i] = q_i v(\vartheta)$, $1 \le i \le n$, wobei c_i, q_i bekannte reelle Konstanten für alle $1 \le i \le n$ seien, $\vartheta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ und $\mu, v : \Theta \to \mathbb{R}$ bekannte, messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass der beste lineare erwartungstreue Schätzer T für die Kenngröße $\tau(\vartheta) = \mu(\vartheta)$ gegeben ist durch

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{q_i}X_i}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{q_i}} \qquad \text{und die Varianz} \qquad \mathrm{Var}_\vartheta[T] = \frac{v(\vartheta)}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{q_i}} \quad \text{hat.}$$

b) Seien X_i die Lebensdauern von Mikroben, die sich jeweils in einer Flüssigkeit mit Konzentration k_i eines toxischen Stoffes befinden ($1 \le i \le n$). Man nimmt an, dass die Lebensdauern X_i unabhängig und exponentialverteilt sind mit Mittelwerten $\frac{\vartheta}{k_i}$.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil a) den besten linearen erwarungstreuen Schätzer von $\tau(\vartheta) = \vartheta$ und zeigen Sie, dass die Varianz dieses Schätzers nicht von $k_1, \ldots, k_n$ abhängt.