Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 13

Abgabetermin: Mittwoch, 30.01.2019, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\mathbb{R}}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, die Dichten f_ϑ bzgl. des Lebesguemaßes besitzt und für die ϑ ein Lokationsparameter ist, d.h. $f_\vartheta(x) = f(x-\vartheta)$. Sei $\mathscr{M} = \big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R})\big)$ das zugehörige statistische Modell und $\mathscr{M}^{\otimes n}$ das entsprechende Produktmodell sowie $n \geq 3$. Ferner seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

i) Die Dichtefunktion $f(x)$ ist differenzierbar in x, und die Ableitung $f'(x)$ ist zumindest in einem Punkt x_0 stetig.

ii) Für jede mögliche Menge $x_1,\ldots,x_n$ von Beobachtungen (mit $n \geq 3$) ist $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ eine Lösung der Log-Likelihood-Gleichung $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sum_{i=1}^n \log(f(x_i-\vartheta) = 0$.

Zeigen Sie, dass dann schon $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ gelten muss für ein $\sigma^2 > 0$, d.h. $\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{N}(\vartheta,\sigma^2)$.

Hinweise: Nutzen Sie Eigenschaft ii) und betrachten sie ganz spezielle Stichproben, um daraus Eigenschaften der logarithmischen Ableitung $g(x) = \frac{\partial}{\partial x}\log(f(x)) = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log(f(x-\vartheta))$ herzuleiten. Zeigen Sie insbesondere $g(u)+g(v) = g(u+v)$ und verwenden Sie (ohne Beweis), dass Lösungen dieser *Cauchyschen Funktionalgleichung*, die zumindest in einem Punkt x_0 stetig sind, die Form $g(x) = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$ haben müssen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$ und Z definiert durch $Z := Y\mathbb{1}_{\{|Y|\leq a\}} - Y\mathbb{1}_{\{|Y|>a\}}$ für ein beliebiges, aber festes $a > 0$. Zeigen Sie, dass auch $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, aber der Zufallsvektor $X = (Y,Z)$ nicht zweidimensional normalverteilt ist.

b) Seien X_1 und X_2 unabhängig und identisch $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt. Zeigen Sie, dass dann auch X_1+X_2 und X_1-X_2 unabhängig sind.

c) Seien X, Y gemeinsam normalverteilt mit $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$ und $\mathrm{Corr}[X,Y] = \rho$. Zeigen Sie, dass X und $Y-\rho X$ unabhängig sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Seien $(X,Y) \sim \mathrm{N}(\mu,\Sigma^2)$ zweidim. normalverteilt mit Mittelwertvektor $\mu = (\mathbb{E}[X],\mathbb{E}[Y])^\top$ und Covarianzmatrix

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } \sigma_X^2 = \mathrm{Var}[X],\ \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}[Y] \text{ und } \rho = \mathrm{Corr}[X,Y].$$

Ist $|\rho| < 1$, so ist Σ^2 invertierbar, und (X, Y) hat eine gemeinsame Dichte der Form

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma^2)}} e^{-\frac{1}{2}\left\langle \binom{x-\mathbb{E}[X]}{y-\mathbb{E}[Y]}, (\Sigma^2)^{-1}\binom{x-\mathbb{E}[X]}{y-\mathbb{E}[Y]} \right\rangle},$$

wobei $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ bezeichne.

Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung $\mathbb{P}^{Y|X=x}$ von Y gegeben $X = x$ die Normalverteilung $\mathrm{N}\big(\mathbb{E}[Y] + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y}(x - \mathbb{E}[X]), \sigma_Y^2(1-\rho^2)\big)$ ist.

b) Sei (X, Y) ein Paar reeller Zufallsvariablen, deren gemeinsame Dichte die Form

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c\, e^{-(1+x^2)(1+y^2)}$$

hat, wobei $c > 0$ so gewählt sei, dass $f_{(X,Y)}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^{\otimes 2})$ ist. Zeigen Sie, dass $f_{(X,Y)}$ *nicht* die Dichte einer zweidimensionalen Normalverteilung ist, jedoch die bedingten Dichten $f_{Y|X=x}(y)$ und $f_{X|Y=y}(x)$ jeweils (eindimensionale) Normalverteilungsdichten sind.

Hinweis: Sie dürfen (ohne Beweis) die *Bayessche Formel für Dichten* verwenden:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy}, \qquad \text{d.h. } f_{Y|X=x}(y) \text{ ist die Dichte von } \mathbb{P}^{Y|X=x}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Beweisen Sie Satz 5.1.2 der Vorlesung.