Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 11

Abgabetermin: Mittwoch, 16.01.2019, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei F die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Zeigen Sie, dass für die Quantilfunktion F^{-1} aus Definition 4.1.7 der Vorlesung folgende Eigenschaften gelten:

a) Die Quantilfunktion F^{-1} ist monoton wachsend und linksseitig stetig.

b) F ist stetig $\iff$ F^{-1} ist streng monoton wachsend.

c) F ist streng monoton wachsend $\iff$ F^{-1} ist stetig.

d) F ist streng monoton wachsend $\implies$ $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$.

e) F ist stetig $\implies$ $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und $V \sim \mathrm{UC}(0,1)$ eine von X unabhängige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, dann wird die *modifizierte Verteilungsfunktion* $\tilde{F}$ von X definiert durch

$$\tilde{F}(x,\lambda) := \mathbb{P}(X < x) + \lambda \mathbb{P}(X = x) \text{ oder äquivalent } \tilde{F}(x,\lambda) := F(x-) + \lambda\big(F(x) - F(x-)\big)$$

und die *Verteilungstransformierte von* X durch $U := \tilde{F}(X, V)$.
Zeigen Sie, dass $U \sim \mathrm{UC}(0,1)$ gilt und $F^{-1}(U) = X$ fast sicher.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Seien $(X_i)_{i\geq 1}$ unabhängige, identisch verteilte, reellwertige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F, F_n die empirische Verteilungsfunktion von $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ gemäß Definition 4.1.5 der Vorlesung und $D_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$. Der Satz von Dvoretsky, Kiefer und Wolfowitz besagt:

   Es gibt eine nicht von F abhängende Konstante $0 < C < \infty$, so dass gilt

   $$\mathbb{P}(D_n > t) \leq Ce^{-2nt^2} \text{ für alle } t > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

   Beweisen Sie mit Hilfe dieses Resultats den Satz von Glivenko-Cantelli.

b) Seien $(X_i)_{i\geq 1}$ unabhängige, identisch verteilte Bernoulli-Variablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$, d.h. $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$, und F die zugehörige Verteilungsfunktion. Ferner sei F_n die empirische Verteilungsfunktion von $(X_i)_{1\leq i\leq n}$. Zeigen Sie *ohne Verwendung des Satzes von Glivenko-Cantelli*, dass

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0 \text{ fast sicher.}$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $\mathscr{M}$ ein statistisches Modell ähnlich wie in Beispiel 4.1.1 der Vorlesung, d.h. Θ ist die Menge aller stetigen oder diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, und $\mathscr{M}^{\otimes n}$ das zugehörige Produktmodell. Zeigen Sie, dass für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega^n = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{B}$ das *empirische Maß*

$$\tilde{\mu}_x(A) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_A(x_i)$$

ein gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer für die Kenngröße $\tau(\vartheta) = \vartheta(A)$ ist (beachten Sie, dass hier $\vartheta = \mathbb{P}_\vartheta$).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die *Ordnungsstatistik* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $O(x_1, \ldots, x_n) = (x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$, die die Beobachtung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in aufsteigender Reihenfolge sortiert, eine vollständige und suffiziente Statistik ist.